

Tentamen Verzamelingen en Kansrekening voor BWI

22 december 2010, 12:00–14:45

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Er zijn in totaal 75 punten te behalen. Het gebruik van een eenvoudige rekenmachine is toegestaan. Elk antwoord dient vergezeld te gaan van een duidelijke toelichting!

1. Laura geeft een groot feest waarvoor 600 gasten zijn uitgenodigd, die allen tegelijk gaan lunchen aan 12 lange tafels, met aan elke tafel 50 genummerde stoelen. Elke gast heeft van tevoren een stoelnummer toegewezen gekregen, maar in de grote drukte blijkt iedereen blindelings een plek te hebben uitgezocht. Beschouw de gasten als genummerd van 1 t/m 600, volgens het stoelnummer dat zij gekregen hebben. We zijn geïnteresseerd in de volgende gebeurtenissen:

$T := \{\text{elke gast aan tafel 1 zit op de hem/haar toegewezen stoel}\}$

$A := \{\text{elke gast zit aan de juiste tafel,}$

maar niet noodzakelijk op de hem/haar toegewezen stoel}

$B := \{\text{gasten 1, 2 en 3 zitten alle drie niet op de hun toegewezen stoelen}\}$

(a) [5 punten] Stel een uitkomstenruimte S op voor de beschreven situatie, zodanig dat $P(E) = \#E/\#S$ voor elke gebeurtenis $E \subset S$, en geef ook $\#S$.

(b) [5 punten] Beschrijf T als deelverzameling van S en bereken $P(T)$.

(c) [5 punten] Bereken $P(A)$.

(d) [6 punten] Voer in: $E_j := \{\text{gast } j \text{ zit op de hem/haar toegewezen stoel}\}$ (voor $j = 1, 2, 3$). Druk B uit in termen van de E_j en bereken $P(B)$.

Aanwijzing: gebruik de wetten van De Morgan; is $E_j \cap E_k$ leeg voor $j \neq k$?

2. Dieuwertje gooit net zo lang met een zuivere munt totdat zij voor het eerst kop gooit. Het aantal worpen dat zij nodig heeft noemen we X .

(a) [5 punten] Geef de waardenverzameling en de kansmassafunctie van de stochast X (geen berekening nodig). Hoe heet de kansverdeling van X ?

(b) [5 punten] Merk op dat $\{X \text{ is even}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X = 2k\}$. Geef $P(X = 2k)$ voor $k \in \mathbb{N}$, en toon daarmee aan dat $P(X \text{ is even}) = 1/3$.

(c) [5 punten] Onderzoek of de gebeurtenissen $\{X \text{ is even}\}$ en $\{X \leq 2\}$ onafhankelijk zijn.

De beruchte Bastiaan K. dwingt Dieuwertje om hem 12 Euro te betalen als zij een oneven aantal worpen nodig heeft totdat zij kop gooit; daar staat tegenover dat hij haar per worp 9 Euro betaalt als het totale aantal worpen even is. Dieuwertjes kapitaal verandert dus met een bedrag W waarvoor geldt $W = 9X$ als X even is, en $W = -12$ als X oneven is.

(d) [6 punten] Merk op dat W een functie is van X . Bereken $E(W)$ met de wet van de onbewuste statisticus.

3. Desmond houdt een geigerteller bij een radioactief preparaat, en telt gedurende een minuut hoe vaak de teller piept. Het aantal piepjes noemen we X , en is Poisson verdeeld met parameter $\lambda > 0$.

(a) [5 punten] Geef de waardenverzameling, de kansmassafunctie, de verwachting en de variantie van X (berekeningen zijn niet nodig).

(b) [6 punten] Bereken $\text{Var}(2^X)$.

Desmond stopt nu evenveel gele ballen in een vaas als het aantal piepjes dat hij geteld heeft, plus 1 rode bal. Vervolgens trekt Rick een willekeurige bal uit de vaas. Introduceer

$$R := \{\text{Rick trekt de rode bal uit de vaas}\}.$$

(c) [5 punten] Leg uit waarom geldt $P(R \mid X = k) = \frac{1}{k+1}$ (geen berekening nodig, alleen een toelichting), en toon hiermee aan dat $P(R) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})$.

(d) [5 punten] Bereken de conditionele kans dat Desmond geen enkel piepje heeft gehoord, als gegeven is dat Rick de rode bal heeft getrokken.

4. Vanwege de enorme toename in criminaliteit op de VU is er een onderzoek gedaan naar het criminele verleden van VU-studenten. Daaruit is gebleken dat 1% van alle VU-studenten én BWI studeert én nog geen misdrijf heeft gepleegd. Ook is gebleken dat 30% van de BWI-ers wel eens een misdrijf heeft gepleegd. Als laatste is gebleken dat 80% van de VU-studenten die nooit een misdrijf hebben gepleegd, geen BWI studeert. De niets vermoedende Franziska H. komt een willekeurige VU-student tegen.

(a) [6 punten] Toon aan dat de kans dat deze willekeurige VU-student nog nooit een misdrijf gepleegd heeft gelijk is aan $1/20$. Toon ook aan dat de kans dat hij/zij BWI studeert gelijk is aan $1/70$.

(b) [6 punten] Als Franziska H. erachter komt dat deze student geen BWI studeert, wat is dan de conditionele kans (gegeven deze informatie) dat de student wel eens een misdrijf heeft gepleegd?