

Hertentamen Verzamelingen en Combinatoriek

1 april 2015, 18:30–20:30

Bij dit tentamen is als hulpmiddel alleen een eenvoudige, niet-grafische rekenmachine toegestaan. Vergeet niet om bij elke opgave ook uit te leggen hoe je aan je antwoord gekomen bent!

Normering: bij elk onderdeel staat het maximale aantal punten. Er zijn in totaal 36 punten te behalen. Cijfer = (aantal punten + 4)/4.

1. Mehmet legt 12 kaartjes naast elkaar op tafel. Op elk kaartje schrijft hij één letter, zodat het woord `P A R T E R R E T R A P` ontstaat.

(a) [3p] Als Mehmet de kaartjes door elkaar husselt en in willekeurige volgorde weer naast elkaar legt, ontstaat een nieuw (mogelijk niet echt bestaand) ‘woord’ van 12 letters. Hoeveel verschillende ‘woorden’ van 12 letters kan Mehmet op deze manier krijgen?

Mehmet nummert de kaartjes door op de achterkant de getallen 1 t/m 12 te schrijven (op elk kaartje één getal). Vervolgens trekt hij willekeurig één voor één en zonder terugleggen 5 kaartjes en legt de getrokken kaartjes naast elkaar op tafel met de cijfers naar boven. Zo ontstaat een rijtje van 5 getallen.

(b) [3p] Geef een wiskundige beschrijving van de uitkomstenruimte U van dit experiment, en geef het aantal elementen van deze uitkomstenruimte.

(c) [3p] Als Mehmet de 5 getrokken kaartjes omdraait, ziet hij weer een ‘woord’, maar nu van 5 letters. Hoeveel uitkomsten zitten er in U die het woord `P A T A T` opleveren?

(d) [4p] Hoeveel uitkomsten zitten er in U die een ‘woord’ van 5 letters opleveren waarin precies 2 klinkers (A en/of E) zitten?

2. In deze opgave bekijken we de gelijkheid

$$(A \triangle B) \cup C = (A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \setminus C).$$

(a) [2p] Laat met behulp van Venn-diagrammen zien dat deze gelijkheid opgaat voor algemene verzamelingen A , B en C .

(b) [4p] Geef nu een formeel bewijs van de bovenstaande gelijkheid door middel van de verzamelingenalgebra of met een redenering (naar keuze).

3. [4p] Bewijs met volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$5 \cdot 3^{4n-3} - 2^{2n-2} \text{ is deelbaar door } 7.$$

4. Zij $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ de functie met voorschrift

$$f(n) = (3n - 1)^2.$$

- (a) [3p] Bepaal het beeld van $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ onder f .
(b) [3p] Zij $E := \{2n: n \in \mathbb{Z}\}$ de verzameling even getallen. Bepaal het volledig origineel van E onder f .
(c) [3p] Beantwoord de volgende drie vragen, en licht je antwoorden toe:
1. Is de functie f injectief?
2. Is de functie f surjectief?
3. Is de functie f bijectief?

5. [4p] Bekijk de twee verzamelingen

$$A := (0, 1] \times (0, 1] \quad B := (2, 4] \times (-2, 6].$$

Toon aan dat A en B gelijkmachting zijn door een concreet functievoorschrift te geven voor een functie $f: A \rightarrow B$, zodanig dat f een bijectie is.