

Tentamen Verzamelingen en Combinatoriek

29 januari 2015, 15:15–17:15

Bij dit tentamen is als hulpmiddel alleen een eenvoudige, niet-grafische rekenmachine toegestaan. Vergeet niet om bij elke opgave ook uit te leggen hoe je aan je antwoord gekomen bent!

Normering: bij elk onderdeel staat het maximaal te behalen aantal punten. Er zijn in totaal 45 punten te behalen. Cijfer = (aantal punten + 5)/5.

1. Jan gooit 5 keer met een twintigzijdige dobbelsteen. Op de zijden van deze dobbelsteen staan de getallen 1 t/m 20, en Jan noteert, in volgorde, welke getallen hij gooit.

(a) [4p] Geef een wiskundige beschrijving van de uitkomstenruimte U voor dit experiment. Hoeveel elementen heeft U ?

(b) [4p] Hoeveel uitkomsten zijn er waarbij alle getallen verschillend zijn?

(c) [4p] Hoeveel uitkomsten zijn er waarbij Jan precies twee keer het getal 2 en precies twee keer het getal 15 gooit?

2. In deze opgave bekijken we de gelijkheid

$$A \setminus (B \cap C) = (B^c \setminus A^c) \cup (C^c \setminus A^c).$$

(a) [3p] Laat met behulp van Venn-diagrammen zien dat deze gelijkheid opgaat voor algemene verzamelingen A , B en C .

(b) [5p] Geef nu een formeel bewijs van de bovenstaande gelijkheid. Kies zelf of je dit doet door middel van de verzamelingenalgebra, of met een redenering.

3. [5p] Laat $A_1, A_2, A_3, \dots$ een stijgende rij verzamelingen zijn, dus

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$$

Bewijs met volledige inductie:

$$\text{voor elke } n \in \mathbb{N} \text{ geldt } A_n = \bigcup_{k=1}^n (A_k \setminus A_{k-1})$$

waarbij $A_0 := \emptyset$.

4. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ de functie met voorschrift

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- (a) [4p] Bepaal het beeld van $[-1, 2]$ onder f .
- (b) [4p] Bepaal het volledig origineel van $[0, \frac{1}{3}]$ onder f .
- (c) [4p] Is de functie f (i) injectief, (ii) surjectief en/of (iii) bijectief?

5. Gegeven is de verzameling

$$A := \{1, 2\} \times \mathbb{N}.$$

- (a) [4p] Geef een expliciete aftelling van de verzameling A door opsomming.
- (b) [4p] Bewijs nu formeel dat A aftelbaar oneindig is door een concrete bijectie $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ te geven.