

Maak alle opgaven. Antwoorden zonder uitleg scoren slecht. Aantekeningen, boeken, rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen zijn **niet** toegestaan. Als je een onderdeel van een vraag niet kunt maken, mag je het antwoord wel gebruiken in de rest van de opgave. Het cijfer voor het tentamen wordt berekend met de formule $\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{behaalde punten}}{10}$. **Dit tentamen heeft een voorzijde en een achterzijde.** Succes!

Opgave 1 (10 punten). Zij A , B , en C verzamelingen.

- a) Bewijs dat als $B \subseteq A$, dat dan geldt dat

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (B \cap C).$$

- b) Geef verzamelingen A , B , C zodat

$$A - (B - C) \neq (A - B) \cup (B \cap C).$$

Opgave 2 (10 punten). Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ de volgende identiteit

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

geldt.

Opgave 3 (10 punten). Zij G een groep en H een ondergroep van G . Zij $x, y \in G$. We zeggen dat $x \sim y$ als er een $h \in H$ is zodat $x = yh$.

- a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
b) Stel $G = S_3$ en $H = \{(1), (12)\}$. Bereken alle equivalentieklassen van $\sim$.

Opgave 4 (10 punten). Zij A, B niet lege verzamelingen en $f : A \rightarrow B$ en $g : B \rightarrow A$ functies. Stel dat g een linksinverse is van f .

- a) Bewijs dat g surjectief is.
b) Bewijs dat f injectief is.

Opgave 5 (10 punten). Zij $\sigma \in S_{10}$ de permutatie

$$\sigma = (35)(14829)(57)(16)(829).$$

- a) Schrijf σ als een product van disjuncte cycli.
b) Wat is de orde van σ ?
c) Wat is het cykeltype van σ ?

Opgave 6 (10 punten). Zij G, G' groepen en $f : G \rightarrow G'$ een homomorfisme. Laat zien, dat voor elke $x \in G$, er geldt dat $xyx^{-1} \in \ker(f)$ voor alle $y \in \ker(f)$.

Opgave 7 (10 punten). Vind $d = \text{ggd}(2013, 427)$. Vind gehele getallen $x, y \in \mathbb{Z}$ zodat

$$d = x 2013 + y 427.$$

Z.O.Z.

Opgave 8 (10 punten). Zij de verzamelingen A_k gedefinieerd door $A_k = (2k, 2k + 1] \subset \mathbb{R}$. De verzameling E is gegeven als

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

- a) Construeer een bijectie $f : E \rightarrow (1, \infty)$.
- b) Bewijs dat E en $\mathbb{R}$ dezelfde cardinaliteit hebben.

Opgave 9 (10 punten). Zij $a \in \mathbb{Z}$. Zij de bewerking $\star$ op $\mathbb{Z}$ gegeven door

$$x \star y = x + y - a.$$

- a) Laat zien dat $\mathbb{Z}$ met de bewerking $\star$ een abelse groep vormt.
- b) Noem de groep die hier beschreven is G . Construeer een isomorfisme $f : G \rightarrow \mathbb{Z}$.