

Maak alle zeven opgaven. Antwoorden zonder uitleg scoren slecht. Aantekeningen, boeken, rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen zijn **niet** toegestaan. Als je een onderdeel van een vraag niet kunt maken, mag je het antwoord wel gebruiken in de rest van de opgave. Het cijfer voor het tentamen wordt berekend met de formule $\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{behaalde punten}}{10}$. Succes!

Opgave 1 (15 punten). Geef alle getallen $x \in \mathbb{Z}$ zodat

$$x \equiv 4 \pmod{5},$$

$$x \equiv 1 \pmod{7},$$

$$x \equiv 0 \pmod{2}.$$

Opgave 2 (15 punten). Zij G een groep. Definieer het *centrum* van G door middel van

$$Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga \text{ voor alle } g \in G\}.$$

Dit zijn alle elementen van G die commuteren met alle andere elementen in de groep.

- a) Bewijs dat dit een ondergroep is van G .
- b) Bereken $Z(D_4)$, waarbij D_4 de dihedrale groep is van een vierkant.

Opgave 3 (15 punten). Beschouw afbeeldingen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ van de vorm

$$f(x) = ax + b \quad \text{met} \quad a \in \mathbb{R}^*, \quad b \in \mathbb{R}.$$

- a) Controleer dat de samenstelling van dit soort afbeeldingen weer van deze vorm is.
- b) Bewijs dat dit een groep wordt onder samenstelling.
- c) Geef voorbeelden van zulke functies zodat $f \circ g \neq g \circ f$.

Opgave 4 (8 punten). Multiple choice! Geef aan van de onderstaande verzamelingen of ze ofwel eindig, aftelbaar oneindig, of overaftelbaar zijn. Je hoeft geen uitleg te geven.

- a) Zij $n \in \mathbb{N}$. De verzameling bijecties

$$B = \{f : [n] \rightarrow [n] \mid f \text{ is bijectief}\}.$$

- b) De verzameling van eenheidswortels

$$E = \{x \in \mathbb{C} \mid \text{er is } n \in \mathbb{N} \text{ zodat } x^n = 1\}.$$

- c) De verzameling functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

- d) De twee bij twee matrices met gehele coëfficiënten.

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad \text{zodat} \quad ad - bc = 1 \right\}.$$

Opgave 5 (7 punten). Hoeveel elementen heeft $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^*$? Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

Opgave 6 (15 punten). Zij $G \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{R})$ de volgende ondergroep

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 \neq 0 \right\}.$$

Je hoeft niet te bewijzen dat dit een ondergroep is. Construeer een isomorfisme $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$, en bewijs dat dit een isomorfisme is.

Opgave 7 (15 punten). Zij

$$V = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid 1 \in A \text{ en } 2 \notin A\}.$$

Dit zijn de deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ die 1 bevatten, maar 2 niet.

- a) Construeer een injectieve functie $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow V$.
- b) Bewijs dat $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim V$.