

Maak alle opgaven. Antwoorden zonder uitleg scoren slecht. Aantekeningen, boeken, rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen zijn **niet** toegestaan. Als je een onderdeel van een vraag niet kunt maken, mag je het antwoord wel gebruiken in de rest van de opgave. Het cijfer voor het tentamen wordt berekend met de formule $\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{behaalde punten}}{10}$. Succes!

Opgave 1 (10 punten). Zij P en Q proposities. Bewijs of weerleg de uitspraak

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q).$$

Uitwerking 1. De waarheidstabel is gegeven door

P	Q	$(\neg(P \leftrightarrow Q))$	$\Leftrightarrow$	$((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q))$
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	F

De uitspraak $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q))$ is een tautologie, en daarom geldt

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q).$$

Opgave 2 (15 punten). Zij A, B, C verzamelingen met de eigenschappen

$$C = A \cup B,$$

$$C = (A \cup C) \cap B,$$

$$A = (A \cap C) \cup B.$$

Bewijs dat geldt $A = B = C$.

Uitwerking 2. De eerste vergelijking geeft dat $A \subseteq C$ en $B \subseteq C$. Omdat $A \subseteq C$, geldt dat $A \cup C = C$. Dus de tweede vergelijking geeft dat $C = C \cap B$. Hieruit volgt dat $C \subseteq B$. We hadden al geredeneerd dat $B \subseteq C$, dus $B = C$. Omdat $A \subseteq C$, geldt dat $A \cap C = A$. De laatste vergelijking wordt dus $A = A \cup B$. Dus $B \subseteq A$. Omdat $B = C$, geldt $C \subseteq A$. We hadden al gevonden, uit de eerste vergelijking, dat $A \subseteq C$, dus we hebben geredeneerd dat $A = B = C$.

Opgave 3 (15 punten). Zij A, B niet lege verzamelingen, en $f : A \rightarrow B$ een functie. Bewijs dat f injectief is, dan en slechts dan als voor alle deelverzamelingen $S, T \subseteq A$, geldt dat

$$f(S \cap T) = f(S) \cap f(T).$$

Uitwerking 3. We bewijzen eerst, dat als f injectief is, dat geldt dat $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$ voor alle $S, T \subseteq A$. Stel dus dat f injectief is, en kies $S, T \subseteq A$ willekeurig. Voor alle functies geldt de inclusie

$$f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T),$$

want als $y \in f(S \cap T)$, dan is er een $x \in S \cap T$, met $f(x) = y$. Dus $x \in S$ en $x \in T$. Er geldt dat $f(x) \in f(S)$ en $f(x) \in f(T)$, dus $y \in f(S) \cap f(T)$. Voor de omgekeerde inclusie gebruiken we de injectiviteit van f . Stel $y \in f(S) \cap f(T)$. Dan $y \in f(S)$ en $y \in f(T)$. Er is dus een $x \in S$ zodat $f(x) = y$, en er is een $x' \in T$ zodat $f(x') = y$. Maar uit injectiviteit van f volgt dan dat $x = x'$ en dus $x \in S \cap T$, met $f(x) = y$. Dus $y \in f(S \cap T)$. We hebben bewezen dat

$f(S) \cap f(T) \subseteq f(S \cap T)$, en dus dat $f(S) \cap f(T) = f(S \cap T)$.

We bewijzen nu de omkerering. Stel nu dat voor alle $S, T \subseteq A$ geldt dat $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$. Neem $a, b \in A$ willekeurig en definieer $S = \{a\}$ en $T = \{b\}$. Als $a \neq b$ dan $f(S \cap T) = \emptyset$, en dus $f(S) \cap f(T) = f(\emptyset) = \emptyset$. Maar dat betekent dat $f(a) \neq f(b)$, en dus is f injectief.

Opgave 4 (15 punten). Zij $\sim$ de relatie op $\mathbb{Z}$ gedefinieerd door $x \sim y$, dan en slechts dan als er een $k \in \mathbb{Z}$ is zodat $4x + y = 5k$.

- Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
- Geef een volledig stelsel representanten voor $\sim$.

Uitwerking 4.

- Stiekem is deze equivalentie gewoon congruentie modulo 5, want als $4x + y = 5k$, dan $x - y = -(y + 4x - 5x) = -5(k + x)$, en als $x - y = 5l$, dan $4x + y = 4x + (x - 5l) = 5(x - l)$. We zijn hiermee klaar, omdat in het college al is bewezen dat congruentie modulo 5 een equivalentierelatie is. Maar we kunnen dit natuurlijk ook vanuit de definitie bewijzen, wat het idee van de opgave was.

reflexiviteit Zij $x \in \mathbb{Z}$. Omdat $4x + x = 5x$, en $x \in \mathbb{Z}$ geldt $x \sim x$.

symmetrie Zij $x, y \in \mathbb{Z}$, en stel dat $x \sim y$. Dan is er een $k \in \mathbb{Z}$ zodat $4x + y = 5k$. Vermenigvuldig beide kanten van de vergelijking met vier, dan geldt dat $16x + 4y = 5(4k)$ en dus dat $4y + x = 5(4k - 3x)$. Het is duidelijk dat $4k - 3x \in \mathbb{Z}$ en dus dat $y \sim x$.

transitiviteit Zij $x, y, z \in \mathbb{Z}$ met $x \sim y$ en $y \sim z$. Dan zijn er $k, l \in \mathbb{Z}$ zodat $4x + y = 5k$ en $4y + z = 5l$. Tel deze vergelijkingen op, dan krijg je

$$4x + 5y + z = 5(k + l),$$

en dus $4x + z = 5(k + l - y)$. Omdat $k + l - y \in \mathbb{Z}$, geldt $x \sim z$.

Dus $\sim$ is een equivalentierelatie.

- Een volledig stelsel representanten voor $\sim$ is bijvoorbeeld $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Al deze elementen geven verschillende klassen, en $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$, wat te zien is uit deling met rest.

Opgave 5 (15 punten). Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in \mathbb{Z} \\ x + 3 & \text{als } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}.$$

- Bereken het beeld van $[3, 5)$ onder f , en bewijs dat je antwoord klopt.
- Bewijs dat f bijectief is.

Uitwerking 5.

- Het beeld van $[3, 5)$ onder f is

$$f([3, 5)) = \{3, 4\} \cup (6, 7) \cup (7, 8).$$

Er zijn namelijk slechts twee gehele getallen in $[3, 5)$, en dat zijn 3 en 4, en dus $f(\{3, 4\}) = \{3, 4\}$. Verder bevat $(3, 4)$ en $(4, 5)$ geen gehele getallen, dus $f((3, 4)) = (6, 7)$ en $f((4, 5)) = (7, 8)$. Er geldt dat $f([3, 5)) = f(\{3, 4\}) \cup f((3, 4)) \cup f((4, 5)) = \{3, 4\} \cup (6, 7) \cup (7, 8)$

- De functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in \mathbb{Z} \\ x - 3 & \text{als } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases},$$

is een inverse van f . We bewijzen dit. Eerst bewijzen we dat g een rechtsinverse is. Neem $x \in \mathbb{R}$. Als $x \in \mathbb{Z}$, dan $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x) = x$. Als $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, dan $x - 3 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, en dus $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3) + 3 = x$. g is een rechtsinverse van f . Nu bewijzen we dat g een linksinverse van f is. Neem $x \in \mathbb{R}$. Als $x \in \mathbb{Z}$, dan $f(x) = x$ en $x \in \mathbb{Z}$, dus $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x) = x$. Als $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, dan $x + 3 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, en dus $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3) - 3 = x$. g is een linksinverse van f , we hadden al bewezen dat g een rechtsinverse is, en het is dus de inverse van f . f is dus bijectief, wat bewezen is op het college. Je kan natuurlijk ook uit de definitie bewijzen dat f bijectief is.

Opgave 6 (10 punten). Bewijs, met behulp van inductie, dat

$$\sum_{n=0}^{m-1} (1 + 3n(n+1)) = m^3,$$

voor alle $m \in \mathbb{N}$.

Uitwerking 6. Voor de basisstap $m = 1$ checken we dat

$$\sum_{n=0}^{1-1} (1 + 3n(n+1)) = \sum_{n=0}^0 (1 + 3n(n+1)) = 1 + 0 = 1^3 = m^3.$$

Stel nu dat de uitspraak waar is voor m , dan willen we aantonen dat de uitspraak ook waar is voor $m + 1$. Er geldt

$$\sum_{n=0}^{(m+1)-1} (1 + 3n(n+1)) = \sum_{n=0}^{m-1} (1 + 3n(n+1)) + 1 + 3m(m+1).$$

De inductiehypothese is dat $\sum_{n=0}^{m-1} (1 + 3n(n+1)) = m^3$, en dus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{(m+1)-1} (1 + 3n(n+1)) &= m^3 + 1 + 3m(m+1) = m^3 + 3m^2 + 3m + 1. \\ &= (m+1)^3. \end{aligned}$$

Het gevraagde is bewezen.

Opgave 7 (10 punten). Zij I een niet lege verzameling en $\{A_i\}_{i \in I}$ een familie van verzamelingen gendexeerd door I . Zij B een verzameling. Bewijs dat geldt:

$$B - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B - A_i).$$

Uitwerking 7. We bewijzen eerst dat $B - \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} (B - A_i)$. Stel $x \in (B - \bigcup_{i \in I} A_i)$. Dan $x \in B$ en $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$. Dus voor elke $k \in I$ geldt $x \notin A_k$. Omdat $x \in B$ en $x \notin A_k$, geldt dat $x \in B - A_k$ voor elke $k \in I$. Dus $x \in \bigcap_{i \in I} (B - A_i)$, dus $B - \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} (B - A_i)$.

We bewijzen nu dat $\bigcap_{i \in I} (B - A_i) \subseteq B - \bigcup_{i \in I} A_i$. Zij $x \in \bigcap_{i \in I} (B - A_i)$. Dat betekent dat voor alle $k \in I$ geldt dat $x \in B - A_k$. Dus $x \in B$ en $x \notin A_k$ voor alle $k \in I$. Dus $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$. Dus $x \in B - \bigcup_{i \in I} A_i$. We concluderen dat $\bigcap_{i \in I} (B - A_i) \subseteq B - \bigcup_{i \in I} A_i$, en met het voorgaande dat $B - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B - A_i)$.