

Maak alle opgaven. Antwoorden zonder uitleg scoren slecht. Aantekeningen, boeken, rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen zijn **niet** toegestaan. Als je een onderdeel van een vraag niet kunt maken, mag je het antwoord wel gebruiken in de rest van de opgave. Het cijfer voor het tentamen wordt berekend met de formule $\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{behaalde punten}}{10}$. Succes!

Opgave 1 (10 punten). Zij P en Q proposities. Bewijs of weerleg de uitspraak

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q).$$

Opgave 2 (15 punten). Zij A, B, C verzamelingen met de eigenschappen

$$\begin{aligned} C &= A \cup B, \\ C &= (A \cup C) \cap B, \\ A &= (A \cap C) \cup B. \end{aligned}$$

Bewijs dat geldt $A = B = C$.

Opgave 3 (15 punten). Zij A, B niet lege verzamelingen, en $f : A \rightarrow B$ een functie. Bewijs dat f injectief is, dan en slechts dan als voor alle deelverzamelingen $S, T \subseteq A$, geldt dat

$$f(S \cap T) = f(S) \cap f(T).$$

Opgave 4 (15 punten). Zij $\sim$ de relatie op $\mathbb{Z}$ gedefinieerd door $x \sim y$, dan en slechts dan als er een $k \in \mathbb{Z}$ is zodat $4x + y = 5k$.

- Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
- Geef een volledig stelsel representanten voor $\sim$.

Opgave 5 (15 punten). Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in \mathbb{Z} \\ x + 3 & \text{als } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}.$$

- Bereken het beeld van $[3, 5)$ onder f , en bewijs dat je antwoord klopt.
- Bewijs dat f bijjectief is.

Opgave 6 (10 punten). Bewijs, met behulp van inductie, dat

$$\sum_{n=0}^{m-1} (1 + 3n(n+1)) = m^3,$$

voor alle $m \in \mathbb{N}$.

Opgave 7 (10 punten). Zij I een niet lege verzameling en $\{A_i\}_{i \in I}$ een familie van verzamelingen geïndexeerd door I . Zij B een verzameling. Bewijs dat geldt:

$$B - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B - A_i).$$