

Hertentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

23 februari 2012
18:30 – 21:15

Maak alle opgaven. Je mag geen hulpmiddelen gebruiken (boeken, aantekeningen, rekenmachines enz.) Formuleer precies en correct en laat alle redeneringen zien. Antwoorden zonder redenering scoren slecht. Succes!

Opgave 1 (3 punten). Schrijf de waarheidstabel van de volgende logische uitdrukking op:

$$(P \vee \neg Q) \leftrightarrow R.$$

Opgave 2 (2 punten). Zij $P(n)$ een predicaat op de natuurlijke getallen $\mathbf{N}$. Beschouw de volgende twee proposities:

- (1) $\forall N \in \mathbf{N} \exists n, m > N: P(n) \wedge \neg P(m)$
- (2) $(\forall N \in \mathbf{N} \exists n > N: P(n)) \wedge (\forall N \in \mathbf{N} \exists n > N: \neg P(n)).$

Volgt (1) uit (2)? Volgt (2) uit (1)? Motiveer je antwoorden.

Opgave 3. Bewijs dat voor alle verzamelingen A, B, C geldt:

$$(B - C) \cap A \subseteq A - (B \cap C)$$

Opgave 4 (3 punten). Bewijs dat de verzamelingen $(0,1) \cup (2,3)$ en $(0,3)$ dezelfde cardinaliteit hebben.

Opgave 5 (3 punten). Bepaal een inverse functie voor de functie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ die gegeven is door

$$f(x) = \begin{cases} x - 1; & x \geq 1 \\ x^3 - 1; & x < 1. \end{cases}$$

Opgave 6 (3 punten). Is de volgende relatie $\sim$ op $\mathbf{R}$ reflexief, transitief, symmetrisch?

$$x \sim y \iff x^2 y = x y^2$$

Hertentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

23 februari 2012
18:30 – 21:15

Opgave 7 (4 punten). Bewijs met behulp van inductie:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$

Opgave 8 (3 punten). Bepaal de grootste gemene deler d van 384 en 500. Bepaal x en y zodanig, dat $384x + 500y = d$.

Opgave 9 (2+2 punten).

- (1) Beschrijf de symmetriegroep van een regelmatig vijfhoek door alle elementen aan te geven.
- (2) Bepaal een lijst van alle ondergroepen van deze groep.

Opgave 10 (3 punten). Schrijf het element $(13)(24)(34)(13)$ als product van disjuncte cykels. Wat is de orde van dit element?

Opgave 11 (4 punten). Vind een oplossing voor het volgende stelsel modulaire vergelijkingen:

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{7} \\x &\equiv -1 \pmod{3} \\x &\equiv 5 \pmod{10}\end{aligned}$$