

Uitwerkingen 2de deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

21 december 2011
15.15 – 17.15

Opgave 1 (4 punten). Bewijs met behulp van inductie: voor alle $n \in \mathbb{N}$ is

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Voor $n = 1$ is de som links -1 en rechts hebben wij ook $(-1)^{\frac{1 \cdot 2}{2}} = -1$. [1 punt]
Voor de inductiestap hebben wij

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1} (n+1)^2 \stackrel{\text{i.H.}}{=} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1} (n+1)^2 \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2n^2 + 4n + 2 - n^2 - n}{2} = (-1)^{n+1} \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Opgave 2 (2+2 punten). Een recursieve rij a_n is gegeven door

$$a_1 = 2 \quad \text{en} \quad a_{n+1} = a_n + 2n$$

- (1) Bereken de eerste vijf elementen en geef een vermoeden aan voor een gesloten formule voor a_n .
- (2) Bewijs je vermoeden.

- (1) $a_1 = 2$, $a_2 = 2 + 2 = 4$, $a_3 = 4 + 4 = 8$, $a_4 = 8 + 6 = 14$, $a_5 = 14 + 8 = 22$. [1 punt].

Vermoeden: $a_n = n^2 - n + 2$ [1 punt]

- (2) $a_1 = 2 = 1^2 - 1 + 2$ klopt. Voor de inductiestap berekenen wij:

$$(n+1)^2 - (n+1) + 2 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 2 = n^2 + n - 2 = (n^2 - n + 2) + 2n.$$

De rij $n^2 - n + 2$ voldoet dus aan de recursieve regel en is daarom gelijk aan a_n .
[1 punt voor het juiste proberen te bewijzen; 1 punt voor de correcte uitkomst]

Opgave 3 (4 punten). Uit een verzameling van 40 mensen hebben er 25 een smartphone, 18 een tabletcomputer, en 32 een digitale camera. 5 mensen bezitten alle drie gadgets

Uitwerkingen 2de deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

21 december 2011
15.15 – 17.15

en 32 mensen bezitten ten minste twee van de drie. Hoeveel van de 40 mensen hebben geen van de drie gadgets?

Zij S de verzameling mensen met smartphones, T met tablets en C met camera's. Dan hebben wij:

$$|S| = 25, |T| = 18, |C| = 32, |S \cap T \cap C| = 5.$$

De verzameling $S \cup T \cup C$ bevat diegene mensen, die ten minste één gadget hebben, en heeft cardinaliteit

$$\begin{aligned} |S \cup T \cup C| &= |S| + |T| + |C| - |S \cap T| - |S \cap C| - |T \cap C| + |S \cap T \cap C| \\ &= 25 + 18 + 32 - |S \cap T| - |S \cap C| - |T \cap C| + 5 \\ &= 80 - |S \cap T| - |S \cap C| - |T \cap C|. \end{aligned}$$

[1 punt]

De verzameling van alle mensen, die ten minste twee van de drie bezit, is

$$(S \cap T) \cup (S \cap C) \cup (T \cap C),$$

[1 punt]

en

$$\begin{aligned} 32 &= |(S \cap T) \cup (S \cap C) \cup (T \cap C)| \\ &= |S \cap T| + |S \cap C| + |T \cap C| - 3|S \cap T \cap C| + |S \cap T \cap C| \\ &= |S \cap T| + |S \cap C| + |T \cap C| - 2|S \cap T \cap C| \\ &= |S \cap T| + |S \cap C| + |T \cap C| - 10. \end{aligned}$$

[1 punt]

Dus $|S \cap T| + |S \cap C| + |T \cap C| = 42$ en

$$|S \cup T \cup C| = 80 - 42 = 38.$$

Omdat er in totaal 40 mensen zijn, hebben er 2 geen gadget. [1 punt]

Opgave 4 (2+2 punten). Zij S een verzameling met s elementen, T een verzameling met t elementen en U een verzameling met u elementen.

(1) Hoeveel functies bestaan er van $S \times T$ naar U ?

(2) Hoeveel functies bestaan er van S naar $T \times U$?

Leg je antwoorden uit.

Uitwerkingen 2de deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

21 december 2011
15.15 – 17.15

Het aantal functies van een eindige verzameling X naar een eindige verzameling Y is $|Y|^{|X|}$ [1 punt] en de cardinaliteit van $X \times Y$ is $|X| \cdot |Y|$ [1 punt]. Daardoor krijgen wij:

- (1) $|\mathcal{F}(S \times T, U)| = u^{st}$ [1 punt] en
- (2) $|\mathcal{F}(S, T \times U)| = (tu)^s$. [1 punt]

Opgave 5 (4 punten). Zij p een priemgetal en $0 \leq k \leq p$. Bewijs:

$$\text{ord}_p \binom{p}{k} = \begin{cases} 0; & k = 0 \text{ of } k = p \\ 1; & 0 < k < p. \end{cases}$$

Als $k = 0$ of $k = p$ geldt, dan is $\binom{p}{k} = 1$ en $\text{ord}_p(1) = 0$. [1 punt]
Voor de andere k geldt:

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1)}{1 \cdots k}.$$

waar geen van de factoren in de noemer een veelvoud van p is en geen van de factoren $(p-1), \dots, (p-k+1)$ in de teller een veelvoud van p is. Daarom is de orde bij p van de teller 1 en de orde bij p van de noemer 0, dus de orde van de binomiaalcoëfficiënt het verschil $1 - 0 = 1$.

Opgave 6 (1+2 punten).

- (1) Bepaal de grootste gemene deler d van 152 en 44.
- (2) Bepaal x en y zo, dat $152x + 44y = d$.

(1) De algorithmen van Euclides levert

$$152 = 3 \cdot 44 + 20$$

$$44 = 2 \cdot 20 + 4$$

$$20 = 5 \cdot 4 + 0$$

De ggd is daarom 4.

(2) Door terug inzetten krijgen wij

$$4 = 44 - 2 \cdot 20 = 44 - 2 \cdot (152 - 3 \cdot 44) = -2 \cdot 152 + 7 \cdot 44.$$

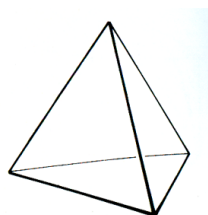
Uitwerkingen 2de deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

21 december 2011
15.15 – 17.15

Opgave 7 (4+1 punten).

- (1) Beschrijf de symmetriegroep van het tetraeder, d.w.z. het veelvlak bestaand uit vier gelijkzijdige driehoeken:



Geef dus alle elementen van deze groep aan (spiegelingen, draaiingen).

- (2) Is deze groep abels?
- (1)
- Voor elk hoekpunt $p \in 1, 2, 3, 4$ is er een draaiing om de as door p en het midden van het tegenoverliggende vlak om 120 en 240 graad; dit levert 8 draaiingen $d_1, \dots, d_4, d_1^2, \dots, d_4^2$. [1 punt]
 - Voor elke lijn is er een spiegeling aan het vlak dat deze lijn en het midden van de tegenoverliggende lijn bevat; dit levert 6 spiegelingen $s_{12}, s_{13}, \dots, s_{34}$ op. [1 punt]
 - De drie 90-graad-draaispiegelingen, die de hoekpunten $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ en $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ afbeelden, brengen met hun machten $3 \cdot 3$ elementen voort. [2 punten]
 - Het eenheidselement maakt het aantal van 24 elementen compleet.
- (2) Deze groep is niet abels; bijvoorbeeld $d_1 s_{12}$ houdt het hoekpunt 4 vast, maar $s_{12} d_1$ beeldt 4 naar 2 af.

Opgave 8 (3 punten). Bewijs dat de verzameling van alle breuken van de vorm $\frac{n}{2^m}$ met $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, een ondergroep van $(\mathbb{Q}, +, 0)$ is.

Noem deze verzameling G .

- Neutraal element: 0 kan worden geschreven als $\frac{0}{2^0}$, dus $0 \in G$. [1 punt]
- Afgesloten onder bewerking: $\frac{n}{2^m} + \frac{n'}{2^{m'}} = \frac{n2^{m'} + n'2^m}{2^{mm'}} \in G$. [1 punt]

Uitwerkingen 2de deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

21 december 2011
15.15 – 17.15

-
- Afgesloten onder inverse: het negatieve $-\frac{n}{2^m} = \frac{-n}{2^m}$ ligt zeker weer in G . [1 punt].

Opgave 9 (4 punten). Vind alle oplossingen x van het volgende stelsel modulaire vergelijkingen:

$$x + 3 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$x + 1 \equiv 2 \pmod{6}$$

$$x \equiv 1 \pmod{7}.$$

Eerst brengen wij de vergelijkingen in standaardvorm:

$$x \equiv 1 \pmod{5}$$

$$x \equiv 1 \pmod{6}$$

$$x \equiv 1 \pmod{7}.$$

Dit zouden wij met de Euclidische algorithmen op kunnen lossen maar het is duidelijk dat $x = 1$ een oplossing is [2 punten]. Volgens de Chinese reststelling is dit de enige oplossing modulo $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, dus alle oplossingen hebben de vorm $x = 210a + 1$ met $a \in \mathbb{Z}$ [2 punten].