

Tweede Deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

21 december 2011
15.15 – 17.15

Maak alle opgaven. Je mag geen hulpmiddelen gebruiken (boeken, aantekeningen, rekenmachines enz.) Formuleer precies en correct en laat alle redeneringen zien. Antwoorden zonder redenering scoren slecht. Succes!

Opgave 1 (4 punten). Bewijs met behulp van inductie: voor alle $n \in \mathbb{N}$ is

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Opgave 2 (2+2 punten). Een recursieve rij $a(n)$ is gegeven door

$$a_1 = 2 \quad \text{en} \quad a_{n+1} = a_n + 2n$$

- (1) Bereken de eerste vijf elementen en geef een vermoeden aan voor een gesloten formule voor a_n .
- (2) Bewijs je vermoeden.

Opgave 3 (4 punten). Uit een verzameling van 40 mensen hebben er 25 een smartphone, 18 een tabletcomputer, en 32 een digitale camera. 5 mensen bezitten alle drie gadgets en 32 mensen bezitten ten minste twee van de drie. Hoeveel van de 40 mensen hebben geen van de drie gadgets?

Opgave 4 (2+2 punten). Zij S een verzameling met s elementen, T een verzameling met t elementen en U een verzameling met u elementen.

- (1) Hoeveel functies bestaan er van $S \times T$ naar U ?
- (2) Hoeveel functies bestaan er van S naar $T \times U$?

Leg je antwoorden uit.

Opgave 5 (4 punten). Zij p een priemgetal en $0 \leq k \leq p$. Bewijs:

$$\text{ord}_p \binom{p}{k} = \begin{cases} 0; & k = 0 \text{ of } k = p \\ 1; & 0 < k < p. \end{cases}$$

Tweede Deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

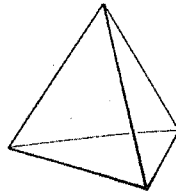
21 december 2011
15.15 – 17.15

Opgave 6 (1+2 punten).

- (1) Bepaal de grootste gemene deler d van 152 en 44.
- (2) Bepaal x en y zo, dat $152x + 44y = d$.

Opgave 7 (4+1 punten).

- (1) Beschrijf de symmetriegroep van het tetraeder, d.w.z. het veelvlak bestaand uit vier gelijkzijdige driehoeken:



Geef dus alle elementen van deze groep aan (spiegelingen, draaingen).

- (2) Is deze groep abels?

Opgave 8 (3 punten). Bewijs dat de verzameling van alle breuken van de vorm $\frac{n}{2^m}$ met $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, een ondergroep van $(\mathbb{Q}, +, 0)$ is.

Opgave 9 (4 punten). Vind alle oplossingen x van het volgende stelsel modulaire vergelijkingen:

$$x + 3 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$x + 1 \equiv 2 \pmod{6}$$

$$x \equiv 1 \pmod{7}.$$