

Uitwerkingen proeftentamen 2 Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer

20 december 2011
Vrije Universiteit Amsterdam

Maak alle opgaven. Je mag geen hulpmiddelen gebruiken (boeken, aantekeningen, rekenmachines enz.) Formuleer precies en correct en laat alle redeneringen zien. Antwoorden zonder redenering scoren slecht. Succes!

Opgave 1 (4 punten). Bewijs met behulp van inductie: voor alle $n \in \mathbf{N}$ is $3^{2n-1} + 1$ door 4 deelbaar.

Voor $n = 1$ is $3^{2n-1} + 1 = 4$ door 4 deelbaar, dus de basisstap lukt [1p].
Neem aan dat de stelling voor n is bewezen. Dan is

$$3^{2(n+1)-1} + 1 = 9 \cdot 3^{2n-1} + 1 = (3^{2n-1} + 1) + 8(3^{2n-1}) \quad [2p]$$

De eerste sommand is per inductiehypothese door 4 deelbaar, de twee sommand is zelfs door 8 deelbaar. Dus $3^{2(n+1)-1} + 1$ is ook door 4 deelbaar [1p].

Opgave 2 (4 punten). Bewijs: voor alle $n \in \mathbf{N}$ geldt

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

$$0 = 0^n = (1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot (-1)^k.$$

Opgave 3 (4 punten). Gegeven drie verzamelingen A, B, C met:

$$\begin{aligned} |A - B| &= 5 \\ |B - C| &= 2 \\ |C - A| &= 3 \\ |A \cup B \cup C| &= 12 \end{aligned}$$

Wat is dan de cardinaliteit van $A \cap B \cap C$? Bewijs jouw antwoord.

Uitwerkingen proeftentamen 2 Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer

20 december 2011
Vrije Universiteit Amsterdam

Het geldt altijd dat $|X - Y| = |X| - |X \cap Y|$ omdat $X = (X - Y) \cup (X \cap Y)$. Daarom geldt:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= |A| - |A \cap B| + |B| - |B \cap C| + |C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \\ &= |A - B| + |B - C| + |C - A| + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Door inzetten van de gegeven cardinaliteiten verkrijgen wij dus:

$$12 = 5 + 2 + 3 + |A \cap B \cap C|,$$

dus $|A \cap B \cap C| = 2$.

Opgave 4 (5 punten). Zij X een verzameling van cardinaliteit m en Y een verzameling van cardinaliteit n met $m \leq n$. Bewijs dat de verzameling $\mathcal{I}(X, Y)$ van alle injectieve functies $X \rightarrow Y$ cardinaliteit $\frac{n!}{(n-m)!}$ heeft.

Wij bewijzen dit door inductie in m . Voor $m = 0$ heeft $\mathcal{I}(X, Y) = \mathcal{I}(\emptyset, Y)$ precies één element, de unieke functie van een lege verzameling naar Y . Ook $\frac{n!}{(n-0)!} = 1$, dus de basisstap klopt [1p].

Neem nu aan dat de stelling bewezen is voor m en laat X cardinaliteit $m + 1$ hebben. Zij $x \in X$. Voor een injectieve functie $f: X \rightarrow Y$ is het beeld van de beperking $f|_{X-\{x\}}$ een deelverzameling van $Y - \{f(x)\}$, dus $f|_{X-\{x\}}: X - \{x\} \rightarrow Y - \{f(x)\}$ is weer een injectieve functie [1p]. Daarom geldt:

$$|\mathcal{I}(X, Y)| = n |\mathcal{I}(X - \{x\}, Y - \{f(x)\})|, \quad [2p]$$

omdat er voor $f(x)$ precies n mogelijke waarden zijn. Per inductiehypothese geldt dus:

$$|\mathcal{I}(X, Y)| = n \frac{(n-1)!}{(n-1-(m-1))!} = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad [1p]$$

Opgave 5 (4 punten). Zij p een priemgetal en $n \in \mathbf{N}$. Bewijs:

$$\text{ord}_p \left(\frac{(n+p)!}{n!} \right) \geq 1.$$

Uitwerkingen proeftentamen 2 Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer

20 december 2011
Vrije Universiteit Amsterdam

Wij berekenen:

$$\frac{(n+p)!}{n!} = \prod_{k=n+1}^{n+p} k. \quad [1p]$$

Precies één van deze p opeenvolgende getallen is door p deelbaar, daardoor is het product ook door p deelbaar. [2p]

Gedetailleerder: vanwege deling met rest is n te schrijven als

$$n = pl + r,$$

waarbij $l \in \mathbf{Z}$ en $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Dan is

$$k = n + (p - r) = pl + r + (p - r) = p(l + 1)$$

door p deelbaar, en omdat $1 \leq p - r \leq p$, is dit k één van de factoren in het product. [1p]

Opgave 6 (2 punten). Schrijf de permutatie $(132)(2643)(15) \in \mathfrak{S}_6$ als product van disjuncte cycli.

$$(153)(264)$$

Opgave 7 (4 punten). Bepaal de orden van alle elementen van de groep $((\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})^\times, \cdot, [1])$.

De elementen van $(\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})^\times$ zijn diegene $[a] \in \mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$ met $\text{ggd}(a, 16) = 1$ [1p]. Dus

$$(\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})^\times = \{[1], [3], [5], [7], [9], [11], [13], [15]\} \quad [1p].$$

- $[1]$ is de eenheid, dus $\text{ord}([1]) = 1$.
- $[3]^2 = [9]$, $[3]^3 = [27] = [11]$, $[3]^4 = [33] = [1]$, dus $\text{ord}([3]) = 4$.
- $[5]^2 = [15] = [-1]$, dus $\text{ord}([5]) = 4$.
- $[7]^2 = [49] = [1]$, dus $\text{ord}([7]) = 2$.
- $[9] = [-7]$, dus $\text{ord}([9]) = \text{ord}([7]) = 2$.
- $[11] = [-5]$, dus $\text{ord}([11]) = \text{ord}([5]) = 4$.
- $[13] = [-3]$, dus $\text{ord}([13]) = \text{ord}([3]) = 4$.
- $[15] = [-1]$, dus $\text{ord}([15]) = 2$.

(max(0, 2 – fouten) punten)

Uitwerkingen proeftentamen 2 Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer

20 december 2011
Vrije Universiteit Amsterdam

Opgave 8 (3 punten). Zij $f: H \rightarrow G$ een groepshomomorfisme. Bewijs: voor alle $h \in H$ geldt: $\text{ord}(h) \geq \text{ord}(f(h))$.

Wij moeten bewijzen dat als $h^n = e_H$ voor een $n \in \mathbf{N}$, dan ook $f(h)^n = e_G$ voor deze n . [1p]

Inderdaad geldt:

$$e_G = f(e_H) = f(h^n) = f(h \cdots h) = f(h) \cdots f(h) = f(h)^n. \quad [2p].$$

Opgave 9 (3 punten). Bewijs dat de deelverzameling van de symmetrische groep $\mathfrak{S}_4$ bestaand uit de eenheid e en alle 3-cykels, geen ondergroep is.

Een ondergroep is gesloten onder vermenigvuldiging. [1p] Echter is

$$(123)(124) = (13)(24)$$

een product van twee 2-cykels, en omdat de ontbinding in disjuncte cykels uniek is, kan dit niet als 3-cykel worden geschreven. [2p]

Opgave 10 (4 punten). Vind alle oplossingen van het volgende stelsel modulaire vergelijkingen:

$$[x] + [7] \equiv [3] \pmod{8}$$

$$[x] - [2] \equiv [4] \pmod{7}$$

$$[x] \equiv [1] \pmod{5}.$$

Wij kunnen dit stelsel ook schrijven als

$$x = 3 - 7 \equiv 4 \pmod{8}$$

$$x = 4 + 2 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$x \equiv 1 \pmod{5}.$$

Wij passen de methode van de Chinese reststelling toe:

$$1 = \text{ggd}(8, 7) = 1 \cdot 8 + (-1) \cdot 7$$

Uitwerkingen proeftentamen 2 Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer

20 december 2011
Vrije Universiteit Amsterdam

Dus de oplossingen van de eerste twee vergelijkingen zijn

$$x \equiv 4 \cdot (-1) \cdot 7 + 6 \cdot 1 \cdot 8 = 20 \pmod{8 \cdot 7}$$

Verder geldt:

$$1 = \text{ggd}(5, 8 \cdot 7) = (-11) \cdot 5 + 1 \cdot 56$$

Daaruit berekenen wij de gemene oplossing voor alle drie vergelijkingen:

$$x \equiv 20 \cdot (-11) \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 56 = -1044 \equiv 76 \pmod{5 \cdot 7 \cdot 8}$$

De oplossingen zijn dus precies de $x \in \mathbf{Z}$ met $x \equiv 76 \pmod{280}$.

Schema:

- 0.5p voor het stelsel in standaardvorm brengen
- 0.5p voor de inzicht dat dit in twee stappen moet gebeuren
- 1p voor de Euclidische algoritme minstens een keer correct toe te passen
- 1.5p voor beide Euclidische algoritme-stappen correct
- 1p voor een oplossing van twee vergelijkingen goed uit te rekenen
- 1.5p voor de oplossing van drie vergelijkingen goed uit te rekenen.

(Alleen het antwoord geven levert 2 punten in totaal af).