

Deeltentamen 1, Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

27 oktober 2011
15:15 – 17:15

Maak alle opgaven. Je mag geen hulpmiddelen gebruiken (boeken, aantekeningen, rekenmachines enz.) Formuleer precies en correct en laat alle redeneringen zien. Antwoorden zonder redenering scoren slecht. Succes!

Opgave 1 (3 punten). Schrijf de waarheidstabel van de logische uitdrukking

$$\neg P \vee (Q \rightarrow R).$$

op.

Opgave 2 (3 punten). Zij X een verzameling en $P(x, y)$ een predicaat van twee variabelen $x, y \in X$. Vertaal de volgende propositie naar een logische formule:

Voor alle $y \in X$ bestaat er een *unieke* $x \in X$ zodanig, dat $P(x, y)$ waar is.

Opgave 3 (3 punten). Zijn de volgende proposities waar of onwaar? Je hoeft hier geen redenering te geven.

- (1) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N}: z > y \rightarrow z > x.$
- (2) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N}: z > y \rightarrow z > x.$
- (3) $\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N}: z > y \rightarrow z > x.$
- (4) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N}: z > y \rightarrow z > x.$
- (5) $\forall y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{N}: z > y \rightarrow z > x.$
- (6) $\forall z \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N}: z > y \rightarrow z > x.$

Opgave 4 (4 punten). Bewijs of weerleg: voor alle verzamelingen A, B, C, D geldt:

- (1) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$
- (2) $(A \times B) \cup (C \times D) \supseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

Opgave 5 (3 punten). Zij $\mathcal{F}(X, Y)$ de verzameling van alle functies van X naar Y en zij $x_0 \in X$ een vast element van X . Beschouw de functie

$$\Phi: \mathcal{F}(X, Y) \rightarrow Y$$

gegeven door $\Phi(f) = f(x_0)$ voor $f \in \mathcal{F}(X, Y)$. Is Φ surjectief, injectief, bijjectief? Bewijs jouw beweringen.

Deeltentamen 1, Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

27 oktober 2011
15:15 – 17:15

Opgave 6 (4 punten). Zij $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}; & x \geq 0 \\ 1 - x^2; & x < 0 \end{cases}$$

Heeft deze functie een linksinverse/rechtsinverse/inverse? Beschrijf deze functies expliciet als zij bestaan en bewijs jouw beweringen.

Opgave 7 (2 punten). De functie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ is gegeven door $f(x) = \lfloor x \rfloor^2$. Bepaal:

- (1) $f([0, 2])$
- (2) $f^{-1}([-4, 4])$

Opgave 8 (3 punten). De relatie $\sim \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ is gegeven door $x \sim y \iff xy > 0$. Is deze relatie een equivalentierelatie? (Geef hiervoor een bewijs.) Zo ja, geef een stelsel representanten voor de quotiëntenverzameling $\mathbf{R}/\sim$.

Opgave 9 (4 punten). Vind alle oplossingen in $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ (de gehele getallen modulo 9) van de vergelijkingen:

- (1) $[3]x = [5]$
- (2) $[4]x = [5]$
- (3) $x^2 + [2]x = [5]$

Geef ook een reden waarom jouw lijst van oplossingen volledig is.