

UITWERKINGEN VOOR HET EERSTE PROEFTENTAMEN VERZAMELINGEN EN ALGEBRA

TILMAN BAUER EN THOMAS ROT

Het is erg belangrijk dat je eerst zelf probeert de opgaven te maken. Alleen deze uitwerkingen lezen is veel minder nuttig. Een andere opmerking: er bestaan altijd veel verschillende manieren, om een oplossing van een som te vinden. Jouw oplossing kan helemaal anders zijn dan die van mij, en ook correct.

Opgave 1 (4 punten). *Zijn de logische uitdrukkingen*

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \quad \text{en} \quad ((\neg P) \rightarrow Q) \rightarrow R$$

equivalent? Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Uitwerking. *Deze uitdrukkingen zijn niet equivalent. Als bijvoorbeeld $P = F$, $Q = T$, $R = F$ is, dan is de linker kant waar, maar de rechte kant $(T \rightarrow T) \rightarrow F$ niet.*

Opgave 2 (4 punten). *Geef een voorbeeld van een predicaat $P(x, y)$ (met $x, y \in \mathbb{N}$), waar*

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})P(x, y)$$

waar is, maar

$$(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})P(x, y)$$

onwaar. Bestaat er ook een predicaat $Q(x, y)$ (met $x, y \in \mathbb{N}$), waarvoor de tweede propositie waar is, maar de eerste onwaar?

Uitwerking. *Een voorbeeld is $P(x, y) \iff y > x$. Voor elk natuurlijk getal x bestaat een natuurlijk getal y met $y > x$ (eerste propositie), maar het is niet waar dat er een natuurlijk getal y bestaat, dat groter dan alle natuurlijke getallen is (tweede propositie).*

De tweede propositie impliceert de eerste als $x, y \in \mathbb{N}$ worden gekozen, dus er bestaat geen voorbeeld waar de tweede propositie waar, maar de eerste onwaar is. Inderdaad, stel dat de tweede propositie waar is. Laat y_0 een element zijn, zo dat $P(x, y_0)$ voor alle $x \in \mathbb{N}$ geldt. Om de eerste propositie te bewijzen, moeten wij voor elk x een y kiezen zodanig, dat $P(x, y)$ geldt. Hier kunnen wij dus $y = y_0$ onafhankelijk van x kiezen.

Opgave 3 (4 punten). *Bewijs: voor alle verzamelingen A, B, C geldt:*

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C).$$

Uitwerking. “ $\subseteq$ ”: *Zij $(a, b) \in A \times (B - C)$, dus $a \in A$ en $b \in B$, maar $b \notin C$. Dit betekent dat $(a, b) \in A \times B$ ligt, maar $(a, b) \notin A \times C$. Dus $(a, b) \in (A \times B) - (A \times C)$.*

“ $\supseteq$ ”: *Zij $(a, b) \in (A \times B) - (A \times C)$. Dus $a \in A$ en $b \in B$, maar niet $(a \in A \text{ en } b \in C)$. Dus $(a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (a \notin A \vee b \notin C)$. Dit impliceert dat $a \in A$ en $b \in B - C$ ligt, dus $(a, b) \in A \times (B - C)$.*

Opgave 4 (4 punten). Zij $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ een familie van verzamelingen geïndiceerd over $\mathbb{N}$ met

$$B_i = \{ki \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}.$$

Bepaal de verzamelingen

$$\bigcap_{i=2}^{\infty} B_i \quad \text{en} \quad \bigcup_{i=2}^{\infty} B_i.$$

Uitwerking. Bewering: $\bigcap_{i=2}^{\infty} B_i = \emptyset$. Inderdaad, gegeven een willekeurig $n \in \mathbb{N}$. Dan weten wij dat $n \notin B_n$ omdat het kleinste element van B_n het element $2n$ is. Dus $n \notin \bigcap_{i=2}^{\infty} B_i$. Omdat dit voor elk n geldt, is de doorsnede leeg.

Bewering: $\bigcup_{i=2}^{\infty} B_i = \{n \mid \exists p \geq 2, q \geq 2: n = pq\}$. Bewijs: “ $\subseteq$ ”: Stel $n \in \bigcup_{i=2}^{\infty} B_i$. Dan bestaat er een $p \geq 2$ met $n \in B_p$. Dit betekent dat er een $q \geq 2$ bestaat met $n = pq$. Dus n is ook een element van de verzameling op de rechte kant.

“ $\supseteq$ ”: Stel $n = pq$ voor zekere $p, q \geq 2$. Dan is $n \in B_p$ (en ook $n \in B_q$). Dus $n \in \bigcup_{i=2}^{\infty} B_i$.

Opgave 5 (4 punten). Laat $F \subseteq \times$ de relatie zijn, die gegeven is door

$$m F n \iff m = 2n \vee m = 2n + 1.$$

Is F een functie? Zo ja, bewijs het. Zo nee, geef daarvoor een reden.

Uitwerking. Dit is inderdaad een functie. Daarvoor moeten wij nagaan dat voor elk m één en alleen één n bestaat met $m = 2n$ of $m = 2n + 1$. Als m even is, dan kan nooit $m = 2n + 1$ gelden, en $m = 2n$ dan en alleen dan, als $n = \frac{m}{2}$. Als m oneven is, dan kan nooit $m = 2n$ gelden, en $m = 2n + 1$ dan en alleen dan, als $n = \frac{m-1}{2}$. Dus F definieert een functie.

Opgave 6 (3 punten). Bewijs dat de samenstelling $f \circ g$ van twee injectieve functies weer injectief is.

Uitwerking. Stel dat x, y in de domein van g de eigenschap hebben dat $f(g(x)) = f(g(y))$. Omdat f injectief is, volgt $g(x) = g(y)$. Daaruit volgt dan door de injectiviteit van g ook $x = y$.

Opgave 7 (3 punten). Zij $f: X \rightarrow Y$ een functie. Toon aan dat er een verzameling Z bestaat en functies $g: X \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow Y$ zodanig, dat g surjectief, h injectief, en $f = h \circ g$ is.

Uitwerking. Definieer op X een equivalentierelatie $\sim$ door $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$. De stelling over de universele eigenschap van de quotiëntenverzameling zegt in dit geval, dat men f kan schrijven als een samenstelling van de kanonische afbeelding $g: X \rightarrow X/\sim$ en een injectieve functie $h: X/\sim \rightarrow Y$. Als wij $Z = X/\sim$ zetten, verkrijgen wij de gewenste factorisatie omdat de kanonische afbeelding altijd surjectief is.

Alternatief kunnen wij $Z = (f)$ kiezen en $g(x) = f(x)$ en $h: (f) \rightarrow Y$ de inclusiefunctie. Dan is f per definitie van het beeld (f) surjectief, en h is als inclusie duidelijk injectief.

Opgave 8 (4 punten). Laat $R \subseteq \times$ de relatie zijn, die gegeven is door $x R y \iff x^2 + y^2 = 1$. Is deze relatie symmetrisch, reflexief, transitief, en/of een functie?

Uitwerking. R is

- **symmetrisch**, omdat $x R y \iff x^2 + y^2 = 1 \iff y^2 + x^2 = 1 \iff y R x$;
- **niet reflexief**, omdat bv. $0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$, dus $0 \not R 0$;
- **niet transitief**, omdat bv. $0 R 1$ en $1 R 0$, maar $0 \not R 0$ (zie boven);

- **geen functie**, omdat voor $x = 2$ geen $y \in$ bestaat met $x^2 + y^2 = 1$.

Opgave 9 (5 punten). Definieer een equivalentierelatie $\sim$ op door $x \sim y \iff (x-1)^2 = (y-1)^2$. Je hoeft niet aan te tonen dat dit een equivalentierelatie is. Geef een stelsel representanten voor de equivalentieklassen van $\sim$.

De equivalentieklassen zijn gegeven door

$$[x] = \{y \in \mid (y-1)^2 = (x-1)^2\} = \{y \in \mid y-1 = x-1 \vee y-1 = -(x-1)\} = \{x, 2-x\}.$$

Een stelsel representanten is dus bijvoorbeeld gegeven door $R = [1, \infty)$, want:

- als $x > 1$ dan is $x \in R$ en $2-x \notin R$, dus x is de eenduidige representant van $[x]$;
- als $x < 1$ dan is $x \notin R$ en $2-x \in R$, dus $2-x$ is de eenduidige representant van $[x]$;
- als $x = 1$ dan is $x = 2-x \in R$, dus 1 is de eenduidige representant van $[1]$.