

Eerste proeftentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

17 oktober 2011

Maak alle opgaven. Je mag geen hulpmiddelen gebruiken (boeken, aantekeningen, rekenmachines enz.) Formuleer precies en correct en laat alle redeneringen zien. Antwoorden zonder redenering scoren slecht. Succes!

Opgave 1 (4 punten). Zijn de logische uitdrukkingen

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \quad \text{en} \quad ((\neg P) \rightarrow Q) \rightarrow R$$

equivalent? Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 2 (4 punten). Geef een voorbeeld van een predicaat $P(x, y)$ (met $x, y \in \mathbf{N}$), waar

$$(\forall x \in \mathbf{N})(\exists y \in \mathbf{N})P(x, y)$$

waar is, maar

$$(\exists y \in \mathbf{N})(\forall x \in \mathbf{N})P(x, y)$$

onwaar. Bestaat er ook een predicaat $Q(x, y)$ (met $x, y \in \mathbf{N}$), waarvoor de tweede propositie waar is, maar de eerste onwaar?

Opgave 3 (4 punten). Bewijs: voor alle verzamelingen A, B, C geldt:

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C).$$

Opgave 4 (4 punten). Zij $\{B_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ een familie van verzamelingen geïndiceerd over $\mathbf{N}$ met

$$B_i = \{ki \mid k \in \mathbf{N}, k \geq 2\}.$$

Bepaal de verzamelingen

$$\bigcap_{i=2}^{\infty} B_i \quad \text{en} \quad \bigcup_{i=2}^{\infty} B_i.$$

Opgave 5 (4 punten). Laat $F \subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ de relatie zijn, die gegeven is door

$$m F n \iff m = 2n \vee m = 2n + 1.$$

Is F een functie? Zo ja, bewijs het. Zo nee, geef daarvoor een reden.

Eerste proeftentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

17 oktober 2011

Opgave 6 (3 punten). Bewijs dat de samenstelling $f \circ g$ van twee injectieve functies weer injectief is.

Opgave 7 (3 punten). Zij $f: X \rightarrow Y$ een functie. Toon aan dat er een verzameling Z bestaat en functies $g: X \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow Y$ zodanig, dat g surjectief, h injectief, en $f = h \circ g$ is.

Opgave 8 (4 punten). Laat $R \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ de relatie zijn, die gegeven is door $x R y \iff x^2 + y^2 = 1$. Is deze relatie symmetrisch, reflexief, transitief, en/of een functie?

Opgave 9 (5 punten). Definieer een equivalentierelatie $\sim$ op $\mathbf{Z}$ door $x \sim y \iff (x - 1)^2 = (y - 1)^2$. Je hoeft niet aan te tonen dat dit een equivalentierelatie is. Geef een stelsel representanten voor de equivalentieklassen van $\sim$.