

Uitwerkingen hertentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

2 maart 2011
15:30 – 17:30

Maak alle opgaven. Je mag geen hulpmiddelen gebruiken (boeken, aantekeningen, rekenmachines enz.) Formuleer precies en correct en laat alle redeneringen zien. Antwoorden zonder redenering scoren slecht. Succes!

Opgave 1 (4 punten). Voor verzamelingen A en B definieer

$$A \triangle B := (A - B) \cup (B - A).$$

Toon aan dat voor alle verzamelingen A, B, C geldt:

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Allereerst merken wij op dat $\triangle$ symmetrisch is: $A \triangle B = B \triangle A$. Dus het is voldoende om $(A \triangle B) \triangle C \subseteq A \triangle (B \triangle C)$ te bewijzen. Neem eerst aan dat $x \in (A \triangle B) - C$. Dan is $x \in (A - B) - C$ of $x \in (B - A) - C$. Als $x \in (A - B) - C$ dan is $x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$. Dus $x \notin B - C$ en $x \notin C - B$, dus $x \notin (B \triangle C)$. Omdat tegelijkertijd $x \in A$, volgt, dat $x \in A - (B \triangle C) \subseteq A \triangle (B \triangle C)$.

Anderzijds, als $x \in (B - A) - C$, dan is $x \in B \wedge x \notin A \wedge x \notin C$. Dus $x \in B - C \subseteq B \triangle C$, maar $x \notin A$, dus $x \in (B \triangle C) - A \subseteq A \triangle (B \triangle C)$.

Opgave 2 (6 punten). Zij S de verzameling van alle steden, H de verzameling van alle huizen, en M de verzameling van alle mensen. Zij $m \in M, h \in H, s \in S$. Schrijf $m \triangleleft h$ als mens m in huis h woont. Schrijf $h \triangleleft s$ als huis h in stad s staat.

Druk de volgende zinnen door formules met kwantoren en logische bewerkingen uit, zoals in het voorbeeld. Je hoeft geen redeneringen te geven.

(0) **(Voorbeeld.)** In elk huis woont een mens. $\rightarrow \forall h \in H \exists m \in M: m \triangleleft h$.

(1) Er bestaat een leegstaand huis. $\rightarrow \exists h \in H \forall m \in M: \neg(m \triangleleft h)$.

(2) In elke stad zijn (een of meerdere) leegstaande huizen.

$$\forall s \in S \exists h \in H \forall m \in M: \neg(m \triangleleft h) \wedge h \triangleleft s.$$

(3) Steden zonder huizen bestaan niet.

$$\forall s \in S \exists h \in H: h \triangleleft s$$

(4) In elke stad wonen (een of meerdere) mensen.

$$\forall s \in S \exists h \in H \exists m \in M: m \triangleleft h \wedge h \triangleleft s$$

Uitwerkingen hertentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

2 maart 2011
15:30 – 17:30

(5) Er zijn mensen, die in meerdere verschillende huizen wonen.

$$\exists h_1 \in H \exists h_2 \in H \exists m \in M: m \triangleleft h_1 \wedge m \triangleleft h_2 \wedge h_1 \neq h_2.$$

(6) Huizen, die bij geen stad horen, zijn nooit leegstaand.

$$\forall h \in H: (\forall s \in S: \neg(h \triangleleft s)) \rightarrow \exists m \in M: m \triangleleft h$$

of

$$\forall h \in H: (\exists s \in S: h \triangleleft s) \vee (\exists m \in M: m \triangleleft h).$$

Opgave 3 (3 punten). Bewijs (door een bijectie aan te geven) dat de verzamelingen $[0, 1]$ en $(0, 2]$ dezelfde cardinaliteit hebben.

Zij $f(x) = 2 - 2x$. Dan is $f(0) = 2$, $f(1) = 0$, en, omdat f monotoon is, $f_*[0, 1] \subseteq (0, 2]$. De functie f is bijectief omdat $g(y) = 1 - \frac{y}{2}$ een inverse functie is:

$$g(f(x)) = 1 - \frac{2 - 2x}{2} = x \quad \text{en} \quad f(g(y)) = 2 - 2\left(1 - \frac{y}{2}\right) = y.$$

Opgave 4 (3 punten). Een relatie $R \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ zij gegeven door $xRy \iff x|y \vee y|x$ (x deelt y of y deelt x). Is deze relatie symmetrisch, reflexief, transitief? Geef bij alle drie punten goede redeneringen.

De relatie is wél symmetrisch: $xRy \iff x|y \vee y|x \iff y|x \vee x|y \iff yRx$. Hij is ook reflexief: elk getal x deelt zichzelf. Hij is echter niet transitief. Bijvoorbeeld: $1|2$, $1|3$ dus $2R1$ en $1R3$ maar $2 \nmid 3$ omdat zowel $2 \nmid 3$ als $3 \nmid 2$.

Opgave 5 (4 punten). Zij a_n het n de Fibonaccigetel met $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Bewijs met behulp van inductie: a_n is even als en alleen als n door 3 deelbaar is.

Basisstap: $a_1 = 1$ en $a_2 = 1$ zijn oneven.

Inductiestap: Zij $n \geq 3$ en stel dat de bewering voor alle a_i met $i < n$ geldt. Er zijn drie gevallen:

Uitwerkingen hertentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

2 maart 2011
15:30 – 17:30

-
- (1) $n \equiv 0 \pmod{3}$. In dit geval zijn per inductiehypothese a_{n-1} en a_{n-2} oneven. Dan is $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ even.
- (2) $n \equiv 1 \pmod{3}$. In dit geval is a_{n-1} even en a_{n-2} oneven. Dan is a_n , als som van een even en een oneven getal, oneven.
- (3) $n \equiv 2 \pmod{3}$. In dit geval is a_{n-1} oneven en a_{n-2} even, dus a_n weer oneven.

Daarmee is de bewering bewezen.

Opgave 6 (3 punten). Bepaal de grootste gemene deler d van 1144 en 780. Bepaal x en y zodanig, dat $1144x + 780y = d$.

$$\begin{aligned}1144 &= 1 \cdot 780 + 364 \\780 &= 2 \cdot 364 + 52 \\364 &= 7 \cdot 52 + 0\end{aligned}$$

Dus de ggd is 52 en is te schrijven als:

$$52 = 780 - 2 \cdot 364 = 780 - 2 \cdot (1144 - 780) = 3 \cdot 780 - 2 \cdot 1144.$$

Opgave 7 (5 punten). Beschouw de group $G = (\mathbf{Z}/10\mathbf{Z})^\times$ van alle inverteerbare elementen van $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.

- (1) Wat is de orde van G ?
- (2) Bepaal de orden van alle elementen van G .

De inverteerbare elementen van $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ zijn diegene elementen $[a] \in \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ met $\text{ggd}(a, 10) = 1$. Dus

$$(\mathbf{Z}/10\mathbf{Z})^\times = \{[1], [3], [7], [9]\}.$$

De orde van deze groep is dus 4. Om de orden van elementen te bepalen, berekenen wij

$$[3] \cdot [3] = [9]; \quad [7] \cdot [7] = [49] = [9]; \quad [9] \cdot [9] = [81] = [1].$$

Dus $\text{ord}([1]) = 1$, $\text{ord}([9]) = 2$ en $\text{ord}([3]) = \text{ord}([7]) = 4$.

Uitwerkingen hertentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

2 maart 2011
15:30 – 17:30

Opgave 8 (3 punten). Schrijf het element $(12)(24)(34)(123)$ als product van disjuncte cycli. Wat is de orde van dit element?

$$(12)(24)(34)(123) = (1432),$$

dus het is een “product” van maar een cykel. De orde van dit 4-cykel is 4 (de orde van een n -cykel is altijd n).

Opgave 9 (4 punten). Vind een oplossing voor het volgende stelsel modulaire vergelijkingen:

$$\begin{aligned}x &\equiv 3 \pmod{9} \\x &\equiv -1 \pmod{10} \\x &\equiv 3 \pmod{7}\end{aligned}$$

Een oplossing van de eerste en derde vergelijking is gegeven door $x \equiv 3 \pmod{9 \cdot 7}$. Dus wij moeten nog oplossen:

$$\begin{aligned}x &\equiv 3 \pmod{63} \\x &\equiv -1 \pmod{10}\end{aligned}$$

Daarvoor berekenen wij de ggd van 10 en 63:

$$1 = \text{ggd}(10, 63) = 19 \cdot 10 - 3 \cdot 63$$

en daaruit:

$$x \equiv 19 \cdot 10 \cdot 3 - 3 \cdot 63 \cdot (-1) \equiv 570 + 189 = 759 \equiv 129 \pmod{630}.$$