

Tweede Deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer

24 december 2010
Vrije Universiteit Amsterdam

Maak alle opgaven. Je mag geen hulpmiddelen gebruiken (boeken, aantekeningen, rekenmachines enz.) Formuleer precies en correct en laat alle redeneringen zien. Antwoorden zonder redenering scoren slecht. Succes!

Opgave 1 (4 punten). Bewijs met behulp van inductie: voor alle $n \in \mathbb{N}$ is $3^{2n-1} + 1$ door 4 deelbaar.

Opgave 2 (4 punten). Bewijs: voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Opgave 3 (4 punten). Gegeven drie verzamelingen A, B, C met:

$$\begin{aligned} |A - B| &= 5 \\ |B - C| &= 2 \\ |C - A| &= 3 \\ |A \cup B \cup C| &= 12 \end{aligned}$$

Wat is dan de cardinaliteit van $A \cap B \cap C$?

Opgave 4 (5 punten). Zij X een verzameling van cardinaliteit m en Y een verzameling van cardinaliteit n met $m \leq n$. Bewijs dat de verzameling $\mathcal{I}(X, Y)$ van alle injectieve functies $X \rightarrow Y$ cardinaliteit $\frac{n!}{(n-m)!}$ heeft.

Opgave 5 (4 punten). Zij p een priemgetal en $n \in \mathbb{N}$. Bewijs:

$$\text{ord}_p \left(\frac{(n+p)!}{n!} \right) \geq 1.$$

Tweede Deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer

24 december 2010
Vrije Universiteit Amsterdam

Opgave 6 (2 punten). Schrijf de permutatie $(132)(2643)(15) \in \mathfrak{S}_6$ als product van disjuncte cykels.

Opgave 7 (4 punten). Bepaal de orden van alle elementen van de groep $((\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times, \cdot, [1])$.

Opgave 8 (3 punten). Zij $f: H \rightarrow G$ een groepshomomorfisme. Bewijs: voor alle $h \in H$ geldt: $\text{ord}(h) \geq \text{ord}(f(h))$.

Opgave 9 (3 punten). Bewijs dat de deelverzameling van de symmetrische groep $\mathfrak{S}_4$ bestaand uit de eenheid e en alle 3-cykels, geen ondergroep is.

Opgave 10 (4 punten). Vind alle oplossingen x van het volgende stelsel modulaire vergelijkingen:

$$[x] + [7] \equiv [3] \pmod{8}$$

$$[x] - [2] \equiv [4] \pmod{7}$$

$$[x] \equiv [1] \pmod{5}.$$