

Deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

25 oktober 2010
8:45 – 10:45

Maak alle opgaven. Je mag geen hulpmiddelen gebruiken (boeken, aantekeningen, rekenmachines enz.) Formuleer precies en correct en laat alle redeneringen zien. Antwoorden zonder redenering scoren slecht. Succes!

Opgave 1 (3 punten). Toon de waarheidstabel van de logische uitdrukking

$$P \leftrightarrow (\neg Q \wedge R).$$

Opgave 2 (3 punten). Stel dat de volgende proposities waar zijn:

Appels die groen en klein zijn, zijn zuur.

Appels die klein en niet zuur zijn, zijn groen.

Geef een formeel bewijs van:

Alle kleine appels zijn zuur.

Opgave 3 (3 punten). Bij deze opgave hoef je geen redenering te geven.

Welke van de volgende proposities zijn waar?

- (1) $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(\exists z \in \mathbf{R})x = yz$
- (2) $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(\exists z \in \mathbf{R})z = xy$
- (3) $(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(\exists z \in \mathbf{R})z = xy$
- (4) $(\exists x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R})x = yz$
- (5) $(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R})x = yz$
- (6) $(\exists x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(\exists z \in \mathbf{R})z = xy$

Opgave 4 (4 punten). Bewijs: voor alle verzamelingen A, B, C geldt:

$$(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C).$$

Opgave 5 (3 punten). Construeer een bijectieve functie van de verzameling

$$[1, 8] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

naar de machtsverzameling $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$. Je mag deze functie door een pijldiagram aanduiden, een formule is niet nodig. Je hoeft dan ook geen bewijs voor de bijectiviteit te geven.

Deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

25 oktober 2010
8:45 – 10:45

Opgave 6 (4 punten). Zij $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & 0 \leq x \leq 1 \\ x; & x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$$

Heeft deze functie een linksinverse g ? Zo ja, beschrijf zo'n g expliciet en ga na dat g inderdaad linksinverse is. Zo nee, geef een reden dat er geen linksinverse bestaat.

Doe hetzelfde voor rechtsinverse.

Opgave 7 (2 punten). De relatie $R \subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ zij gegeven door $xRy \iff |x + y| \leq 1$. Bepaal de verzamelingen $R_*(\{1\})$ en $R^*(\{-1, 1\})$.

Opgave 8 (3 punten). De relatie $R \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ zij gegeven door $xRy \iff x - y \in \mathbf{Q}$. Is deze relatie symmetrisch, reflexief, transitief? Geef bij alle drie punten goede redeneringen.

Opgave 9 (4 punten). Vind alle oplossingen in $\mathbf{Z}/9$ van de vergelijkingen:

- (1) $[5]x = [7]$
- (2) $x^2 = [-2]$

Geef ook een reden waarom jouw lijst van oplossingen volledig is.