

Veegtentamen Verzamelingen en Algebra 2

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

16 december 2009
12:00 – 14:00

Maak alle opgaven. Je mag geen hulpmiddelen gebruiken (boeken, aantekeningen, rekenmachines enz.) Formuleer precies en correct en laat alle redeneringen zien. Antwoorden zonder redenering scoren slecht. Succes!

Opgave 1 (2+2+2+2+2 punten). Zij $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$.

- (1) Formuleer de stelling over deling met rest van a door m .
- (2) Wat wordt bedoeld met de restklasse van a modulo m ?
- (3) Geef een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een inverse van $\bar{a}$ in $\mathbb{Z}_m$.
- (4) Leg uit hoe men deze inverse in $\mathbb{Z}_m$ op systematische manier kan berekenen, als hij bestaat.
- (5) Pas dit toe, om de inverse van $\bar{25}$ in $\mathbb{Z}_{36}$ uit te rekenen.

Opgave 2 (6 punten). Gegeven is het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned}x &\equiv 3 \pmod{7} \\x &\equiv 1 \pmod{8} \\x &\equiv -1 \pmod{9}\end{aligned}$$

Bepaal de oplossingsverzameling voor x . Formuleer alle stellingen met voorwaarden die je hierbij gebruikt.

Opgave 3 (2 + 2 + 2 + 2 punten + 4 bonuspunten).

- (1) Wat is de definitie van een groep?
- (2) Bewijs (alleen de axioma's uit (1) gebruikend): als G een groep is, $a, b \in G$, en $ab = e$, dan is ook $ba = e$. Hierbij is e het eenheidselement van G .
- (3) Als een groep G orde 6 heeft, wat zijn dan de mogelijke ordes van ondergroepen H van G ? Formuleer de stellingen die je gebruikt.
- (4) Geef een voorbeeld van een groep G van orde 6 en ondergroepen van alle mogelijke orden.
- (5) Is het mogelijk, dat alle elementen in een oneindige groep G eindige orde hebben? Bewijs jouw antwoord.

Veegtentamen Verzamelingen en Algebra 2

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

16 december 2009
12:00 – 14:00

Opgave 4 (2+2+1 punten). Zij $\sigma = (14538)(25476)(12)(386) \in S_8$.

- (1) Schrijf σ als product van disjuncte cykels.
- (2) Wat is de orde van σ ?
- (3) Wat is het teken van σ ?

Opgave 5 (4 punten). Zij $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ en p een priemgetal. Toon aan: als $a \mid p^n$, dan is a ook een macht van p . (Tip: gebruik de hoofdstelling van de rekenkunde.)

Opgave 6 (4 punten). Beschouw de groep $(\mathbb{Z}_7)^\times = (\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}, \cdot, \bar{1})$. Bewijs of weerleg: deze groep is cyclisch.