

**Dit is het tentamen voor het vak:
Verzamelingen en Algebra 2**

1. Zij m een modulus en $a \in \mathbb{Z}$. Met $\bar{a}$ geven we de restklasse aan van a modulo m .

- (a) Leg uit wat er wordt bedoeld met de inverse van $\bar{a}$ modulo m .
- (b) Geef een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een inverse van $\bar{a}$ modulo m .
- (c) Los de volgende vergelijking op in $\mathbb{Z}_6$.

$$\bar{3}x + \bar{1} = x + \bar{3}.$$

- (d) Los het volgende stelsel vergelijkingen op in $\mathbb{Z}_{11}$.

$$\begin{aligned}\bar{3}x + \bar{6}y &= \bar{1} \\ x + \bar{5}y &= \bar{2}\end{aligned}$$

2. Met ϕ geven we de Euler-totiënt functie aan.

- (a) Geef de betekenis van $\phi(m)$.
- (b) Geef één of twee formules waarmee je $\phi(m)$ (in principe) altijd kunt uitrekenen.
- (c) Bereken $\phi(120)$.
- (d) Hoeveel elementen heeft de groep $\mathbb{Z}_{42}^*$?
- (e) Geef een nauwkeurige formulering van de Stelling van Euler.
- (f) Geef de reductie van de gegeven getallen, modulo de aangegeven modulus.
 - i). $5^{26} \bmod 42$
 - ii). $117^{34} \bmod 120$

3. Gegeven is het volgende stelsel.

$$\begin{aligned}x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ x &\equiv a_3 \pmod{m_3}.\end{aligned}$$

- (a) De Chinese reststelling geeft een voldoende voorwaarde voor de oplosbaarheid van dit stelsel. Geef deze voorwaarde.
- (b) Los het volgende stelsel vergelijkingen op.

$$\begin{aligned}x &\equiv 5 \pmod{8} \\ x &\equiv 6 \pmod{11}\end{aligned}$$

Z.O.Z.

4. Gegeven is een verzameling G met binaire operatie $*$.
- (a) Aan welke axioma's moet $(G, *)$ voldoen om te kunnen spreken van een groep?
 - (b) Wanneer heet $(G, *)$ een Abelse groep?
 - (c) De permutatiegroep S_3 is niet Abels. Geef een voorbeeld waaruit dit blijkt.
 - (d) Veronderstel dat $(G, *)$ een groep is. Toon aan: als $a, b, c \in G$ en $ab = ac$, dan geldt dat $b = c$. [In je bewijs mag je uitsluitend gebruik maken van de in onderdeel (a) genoemde axioma's.]
5. Gegeven is een groep $(G, *)$ en een element $g \in G$.
- (a) Leg uit wat er wordt bedoeld met de orde van g .
 - (b) Als G eindig is, welk verband bestaat er dan tussen de orde van g en het aantal elementen van G ?

De permutatie $\sigma \in S_8$ wordt gegeven door:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

- (c) Schrijf σ als een product van disjuncte cykels, en bereken het teken van σ .
- Zij nu $n \in \mathbb{N}$ en $\tau \in S_n$. Met $\text{sgn}(\tau)$ geven we het teken aan van τ .
- (d) Toon aan: als $\text{sgn}(\tau) = -1$, dan is de orde van τ even.

Normering:

1 : a) 1	2 : a) 2	3 : a) 1	4 : a) 2	5 : a) 2
b) 1	b) 2	b) 5	b) 2	b) 2
c) 3	c) 1		c) 2	c) 2
d) 5	d) 1		d) 3	d) 3
	e) 2			
	f) 3			
10	11	6	9	9

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{aantal punten}}{5} + 1$$