

Deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

16 december 2009
12:00 – 14:00

Maak alle opgaven. Je mag geen hulpmiddelen gebruiken (boeken, aantekeningen, rekenmachines enz.) Formuleer precies en correct en laat alle redeneringen zien. Antwoorden zonder redenering scoren slecht. Succes!

Opgave 1 (3 punten). Bewijs door een bijectieve functie f te geven: de deelverzamelingen $(1, 2]$ en $[5, 7)$ van $\mathbb{R}$ hebben dezelfde cardinaliteit. Je moet ook uitleggen waarom f bijectief is.

Opgave 2 (4 punten+2 punten). Zij A een niet lege verzameling en $\preceq$ een orderrelatie op A . Een element $a \in A$ heet *maximaal element* als $(\forall b \in A) b \preceq a$ geldt.

Bewijs: Als A eindig is en $\preceq$ een *totale* orde is, dan bezit A een maximaal element. Geef twee voorbeelden, die tonen, dat beide condities noodzakelijk zijn.

Opgave 3 (3 punten). Bewijs met inductie: voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Opgave 4 (2 punten + 2 punten). Definieer een recursieve rij $a(n)$ door

$$a(1) = 1 \quad \text{en} \quad a(n+1) = \sum_{i=1}^n a(i) \quad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

- (1) Bereken de eerste vijf elementen en geef een vermoeden aan voor een gesloten formule voor $a(n)$.
- (2) Bewijs je vermoeden.

Opgave 5 (3 punten + 2 punten). Bewijs: voor $a, b \in \mathbb{Z}$ en p een priemgetal geldt: $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$. Geef een tegenvoorbeeld om te laten zien dat dit voor p niet priem in het algemeen niet geldt.

Deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

16 december 2009
12:00 – 14:00

Opgave 6 (2 punten + 2 punten + 2 punten). Zij A een eindige verzameling van cardinaliteit n .

- (1) Hoeveel relaties zijn er op A ?
- (2) Hoeveel symmetrische relaties zijn er op A ?
- (3) Hoeveel totale orden zijn er op A ?

Opgave 7 (1 punt + 2 punten). Bepaal de grootste gemene deler d van 270 en 105. Bepaal x en y zó, dat $270x + 105y = d$.

Opgave 8 (4 punten). Zij $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ en p een priemgetal. Toon aan: als $a \mid p^n$, dan is a ook een macht van p . (Tip: gebruik de hoofdstelling van de rekenkunde.)

Opgave 9 (3 punten). Wat is de definitie van een groep?

Opgave 10 (3 punten). Zij G een groep met eenheidselement e en $a, b \in G$. Bewijs: als $ab = e$, dan ook $ba = e$.

Opgave 11 (2 punten + 1 punt). Schrijf het element $(132)(42)(453) \in S_5$ als product van disjuncte cykels. Wat is de orde van dit element?

Opgave 12 (4 punten). Beschouw de groep $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} - \{[0]\}, \cdot, [1])$. Bewijs of weerleg: deze groep is cyclisch.