

Deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

21 oktober 2009
8:45 – 10:45

Maak alle opgaven. Je mag geen hulpmiddelen gebruiken (boeken, aantekeningen, rekenmachines enz.) Formuleer precies en correct en laat alle redeneringen zien. Antwoorden zonder redenering scoren slecht. Succes!

Opgave 1 (3 punten). Toon de functietabel ("truth table") van de logische uitdrukking

$$P \rightarrow (Q \vee \neg R).$$

Opgave 2 (3 punten). Stel dat de volgende proposities waar zijn:

Als het regent, neem ik een regenjas mee of ik ga niet met de fiets.

Als ik met de fiets ga en ik een regenjas mee heb genomen, dan regent het niet.

Het regent.

Geef een formeel bewijs van:

Ik ga niet met de fiets.

Opgave 3 (4 punten). Bij deze opgave hoeft je geen redenering te geven.

Beschouw de volgende proposities, waar m en n natuurlijke getallen (≥ 1) zijn:

- (a) $(\forall m)(\exists n \geq m) \text{ } n \text{ is mooi.}$
- (b) $(\exists m)(\forall n \geq m) \text{ } n \text{ is mooi.}$
- (c) $(\forall m)(\exists n \leq m) \text{ } n \text{ is mooi.}$
- (d) $(\exists m)(\forall n \leq m) \text{ } n \text{ is mooi.}$

Geef voor iedere van deze proposities aan, met welke van de onderstaande proposities hij equivalent is

- (1) Er bestaat een mooi getal.
- (2) Alle getallen zijn mooi.
- (3) Bijna alle getallen (d.w.z. alle behalve eindig veel) zijn mooi.
- (4) Er bestaan oneindig veel mooie getallen.
- (5) Het getal 1 is mooi.

Opgave 4 (4 punten). Bewijs: voor alle verzamelingen A, B, C geldt:

$$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A).$$

Deeltentamen Verzamelingen en Algebra

Docent: Tilman Bauer
Vrije Universiteit Amsterdam

21 oktober 2009
8:45 – 10:45

Opgave 5 (3 punten). Geef een voorbeeld van een verzameling S en een functie $f: S \rightarrow S$, die injectief, maar niet surjectief is. Bewijs deze eigenschappen voor dit voorbeeld.

Opgave 6 (5 punten). Gegeven vier verzamelingen en drie functies:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W.$$

Stel $g \circ f$ en $h \circ g$ zijn bijectief. Bewijs dat dan f , g , en h allemaal bijectief moeten zijn.

Opgave 7 (4 punten). Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1; & x \geq 0 \\ x - 1; & x < 0. \end{cases}$$

Toon aan dat f bijectief is door een inverse functie g aan te geven. Ga na dat f en g inderdaad inverse functies zijn.

Opgave 8 (2 punten). Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \sin(x)$. Bepaal (zonder bewijs) $f_*([0, \pi])$ en $f^*([0, 1])$.

Opgave 9 (5 punten). Laat $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de relatie zijn, die gegeven is door $x R y \iff x \mid 2y$. Is deze relatie symmetrisch, reflexief, transitief, antisymmetrisch en/of een functie? Geef bij alle vijf punten goede redeneringen.

Opgave 10 (4 punten). Laat $\sim \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de relatie zijn, die gegeven is door

$$x \sim y \iff (\exists n, m \in \mathbb{N}) x^n = y^m.$$

Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is, en bepaal (zonder bewijs) de nevenklassen $[3]$ en $[-8]$.