

Datum: vrijdag 28-10, 13.30-15.30

Beantwoordingsinstructie: licht Uw antwoorden duidelijk toe.

Normering: 4 punten voor som 1, 3 voor som 2, 3 voor som 3.

1. In het (x, y) -vlak wordt de kromme C gegeven door $x = t - \sin(t)$ en $y = 1 - \cos(t)$, waarbij t van 0 tot 2π loopt.

(i) Bereken $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ en geef van beiden het tekenverloop. Geef de eerste termen van de Taylorontwikkeling van x en y rond $t = 0$ en schets de kromme voor t in de buurt van 0 en voor t in de buurt van 2π .

(ii) Schets de kromme C .

(iii) Bereken de integraal $\int_C y dx$.

(iv) Het gebied D wordt begrensd door C en het lijnstuk op de x -as tussen 0 en 2π . Is de oppervlakte van D gelijk aan $\int_C y dx$? Zo ja, waarom wel, zonee, waarom niet?

(v) Bereken de lengte van de kromme C .

2. Punten in de (x, y, z) -ruimte worden in bolcoördinaten gegeven door

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

waarbij $0 \leq \theta \leq \pi$ en $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

(i) S is het oppervlak gegeven door $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. De normaal $\mathbf{n}$ op S wijst van de oorsprong af. Het vectorveld $\mathbf{F}$ wordt gegeven door $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, 0) = x \mathbf{i}$. Bereken $\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int \int_S x dy dz$.

(ii) Leg uit waarom deze integraal gelijk is aan de inhoud van de bol met straal 1.

(iii) Het oppervlak Σ wordt (in bolcoördinaten) gegeven door

$$r = R(\theta, \phi) > 0$$

Laat zien dat de oppervlakte van Σ gegeven wordt door

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} R \sqrt{\left(R^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2\right) \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial R}{\partial \phi}\right)^2} d\phi d\theta$$

3. In de (x, y, z) -ruimte wordt het vectorveld $\mathbf{F}$ gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right).$$

In het (u, v) -vlak is D de cirkelschijf $\{u^2 + v^2 \leq 1\}$. De afbeelding $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ is continu differentieerbaar op D en definieert een regulier oppervlak S (d.w.z. $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \neq \mathbf{0}$). Op de rand van D is $\Phi(u, v) = (u, v)$, dus het beeld van de rand van D is de cirkel C met straal 1 in het vlak $z = 0$. We parametrizeren C met $x = \cos t, y = \sin t, z = 0$, waarbij t van 0 naar 2π loopt.

(i) Bereken $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy\right)$.

(ii) Bereken $\nabla \times \mathbf{F}$.

(iii) Bewijs dat de z -as het oppervlak S snijdt. (Hint: want anders....)