



Faculteit Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit Amsterdam, afdeling Wiskunde.

Hertentamen Vector Calculus (Wisk/Nat), woensdag 2 juli 2003, 13:30 - 15:30.

1. Beschouw de vector functies

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ -2xy - x^2 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad g(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 \\ u - 3uv \end{pmatrix}.$$

Definieer de samengestelde functie $h(u, v) = f(g(u, v))$.

Bereken de afgeleide van h met behulp van de kettingregel.

2. Gegeven de functie

$$f(x, y) = x^2 + 3y^3 - xyz^2 - z.$$

- (a) Bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, en $\frac{\partial f}{\partial z}$.
(b) Bereken de gradient ∇f en bepaal de richtings afgeleide van f in de richting $\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Bekijk de volgende differentiaalvorm op $\mathbf{R}^3$

$$\alpha = xdx - xyzdy + 3ydz.$$

- (a) Bepaal $d\alpha$ en $d^2\alpha$.
(b) Bereken $\alpha \wedge d\alpha$, en $\alpha^2 \wedge d\alpha$.

4. Gegeven de vlakke kromme

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi].$$

- (a) Schets de kromme in het vlak.
(b) Bereken de raaklijn aan γ in het punt $(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

Z.O.Z.

5. Laat M een 2 of 3 dimensionale deelverzameling zijn in $\mathbf{R}^3$, en laat ω een respectievelijk 1 of 2 vorm zijn op M .

- (a) Formuleer de algemene stelling van Stokes voor M en ω .
- (b) In het speciale geval dat M een 3 dimensionale verzameling is (met rand ∂M), formuleer en herleid de Stelling van Gauss uit de algemene stelling van Stokes.

6. Definieer $E^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, en ∂E^2 als een ellips.

- (a) Formuleer de algemene stelling van Stokes voor 1-vormen ω en gebied E^2 .
- (b) Laat zien dat met de keuze $\omega = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$, de integraal

$$\int_{E^2} d\omega,$$

de oppervlakte van E^2 bepaalt.

- (c) Bereken de lijn-integraal $\int_{\partial E^2} \omega$ (Hint: parameteriseer de ellips ∂E^2).
- (d) Gebruik de onderdelen (a) t/m (c) om de oppervlakte van E^2 te bepalen.

Normering:

- 1: 10.
- 2a: 5, 2b: 5.
- 3a: 7, 3b: 8.
- 4a: 5, 4b: 5.
- 5a: 7, 5b: 8.
- 6a: 5, 6b: 7, 6c: 10, 6d: 8.

Eindcijfer = totaal/10 + 1.0