



Faculteit Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit Amsterdam, afdeling Wiskunde.

Tentamen Vector Calculus (Wisk/Nat), woensdag 26 maart 2003, 13:30-15:30.

1. Gegeven de functie

$$f(x, y) = 3x^2 - y^3 \sin(x).$$

- (a) Bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- (b) Bereken de gradient ∇f en bepaal de richtings afgeleide van f in de richting $\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Beschouw de vector functies

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ -2xy \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad G(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - 2v^2 \end{pmatrix}.$$

Definieer de samengestelde functie $H(u, v) = F(G(u, v))$.

Bereken de afgeleide van H met behulp van de kettingregel.

3. Gegeven de vlakke kromme

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

- (a) Laat zien dat de kromme γ een gesloten kromme is.
- (b) Bereken de snelheids vector, en laat zien dat deze nergens nul is.
- (c) Bereken de raaklijn aan γ in het punt $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -1)$ (Hint: $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin(\frac{1}{3}\pi) = \sin(\frac{2}{3}\pi)$).

4. Bekijk de volgende differentiaalvormen op $\mathbf{R}^3$

$$\omega = dx \wedge dy + 2dx \wedge dz, \quad \text{en} \quad \alpha = x^2 dx + yz dy + dz.$$

- (a) Bereken $\omega \wedge \alpha$, $\alpha \wedge \alpha = \alpha^2$ en $\omega \wedge \omega = \omega^2$.
- (b) Bepaal $d\alpha$ en $d\omega$.

Z.O.Z.

5. Zij $f = f(x, y, z)$ een voldoende vaak differentieerbare scalaire functie op $\mathbf{R}^3$.

- (a) Bereken df .
- (b) Laat zien dat $d^2 f = d(df) = 0$.
- (c) Beschouw een 1-vorm $\alpha = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$ en bereken $d\alpha$.
- (d) Een 1-vorm α heet *exact* als geldt dat $\alpha = df$ voor een zekere functie $f = f(x, y, z)$. In het bijzonder betekent dit dat $d\alpha = d^2 f = 0$. Dit heet een *gesloten* 1-vorm. Exacte 1-vormen moeten dus gesloten zijn. Geef een nodige voorwaarde aan op a_1, a_2, a_3 zodat α exact is.
- (e) Gebruik onderdeel (d) om te laten zien dat de 1-vorm α gegeven in opgave 4) niet exact is.

6. Definieer $B^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, en $S^1 = \partial B^2$.

- (a) Formuleer de algemene stelling van Stokes voor 1-vormen ω en gebied B^2 .
- (b) Laat zien dat met de keuze $\omega = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$, de integraal

$$\int_{B^2} d\omega,$$

de oppervlakte van B^2 bepaalt.

- (c) Gegeven de poolcoördinaten $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, laat zien dat $\int_{B^2} d\omega = \text{Opp}(B^2) = \pi$.
- (d) Bewijs dat $\int_{\partial B^2} \omega = \int_{S^1} \omega$ uit te drukken is in de lengte (omtrek) van S^1 .
- (e) Gebruik de onderdelen (c) en (d) om de omtrek van S^1 te bepalen.

Normering:

- 1a: 5, 1b: 5.
- 2: 10.
- 3a: 3, 3b: 3, 3c: 4.
- 4a: 7, 4b: 8.
- 5a: 4, 5b: 4, 5c: 3, 5d: 5, 5e: 4.
- 6a: 4, 6b: 4, 6c: 4, 6d: 4, 6e: 4.

Eindcijfer = totaal/10 + 1.5

Het herkansingstentamen Vector Calculus is op woensdag 2 juli 2003 (13:30 -15:30).