

Elke goedgemaakte opgave levert drie punten op. 'Goedge-
maakt' wil zeggen: correct, volledig beargumenteerd en netjes
opgeschreven.

1. a. Zij A een gesloten deelruimte van een Lindelöfruimte X . Bewijs dat A Lindelöf is.
b. Zij A een overaftelbare deelverzameling van een Lindelöfruimte X . Bewijs dat A een limietpunt heeft.
2. Zij X de reële rechte met de speldjestopologie (= de rechte van Sorgenfrey), en zij $Y = X \times X$.
 - a. Laat zien dat $\mathcal{B} = \{[a, b) \times [c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$ een basis is voor Y .
 - b. Laat zien dat Y separabel is.
 - c. Laat zien dat de lijn $y = -x + 1$ een gesloten en discrete deelruimte is van Y .
 - d. Laat zien dat Y niet Lindelöf is.
3. a. Bewijs dat een eindig product van discrete ruimten discreet is.
b. Voor elke $i \in \mathbb{N}$, zij X_i een discrete ruimte die meer dan één punt bevat. Bewijs dat $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ niet discreet is.
4. a. Zij $f: X \rightarrow Y$ een quotiënt afbeelding met Y samenhangend en $f^{-1}(y)$ samenhangend voor elke $y \in Y$.
Bewijs dat X samenhangend is.
b. Zij (X, d) een metrische ruimte met disjuncte, niet-lege, gesloten deelverzamelingen A en B . Definieer $f: X \rightarrow [0, 1]$ als volgt:

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Bewijs dat f goed gedefinieerd is en continu. Bewijs dat X normaal is.

EINDE