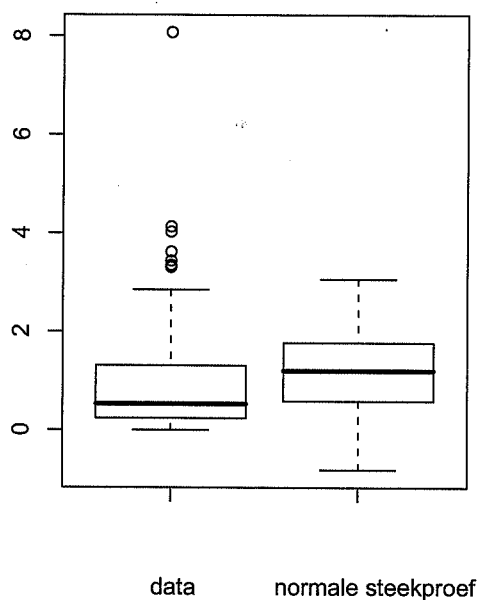

Tentamen Toegepaste Statistiek
voor studenten IMM en AI
Vrije Universiteit, Faculteit Exacte Wetenschappen
2 juni 2010, 18.30-21.15 uur

NB. Alleen het gebruik van een simpele rekenmachine is toegestaan; gebruik van grafische en/of programmeerbare rekenmachines, mobiele telefoons, e.d. is niet toegestaan.

Bijlage: twee rekenregels en Tabel 5.1.

Onderstaande zes opdrachten wegen even zwaar.

1. a) Geef datatype en meetschaal van onderstaande metingen. Geef tevens aan welke visualisatie het meest geschikt is voor de data en waarom.
 - (i) Elk jaar wordt in de maand september, wanneer het ijsoppervlak het laagst is, de hoeveelheid zee-ijs (uitgedrukt in miljoenen vierkante kilometers) in het Noordpoolgebied gemeten.
 - (ii) Na een tv-debat tussen presidentskandidaten A, B en C kunnen kijkers per SMS aangeven op wie van de drie kandidaten ze denken te gaan stemmen. Met 1, 2 of 3 geven ze te kennen op, respectievelijk, kandidaat A, B of C te gaan stemmen.
- b) De linker boxplot in Figuur 1 is een boxplot van data afkomstig van een onbekende verdeling, de rechter is een boxplot van een even grote steekproef uit een normale verdeling met dezelfde verwachting en standaardafwijking als de onbekende verdeling. Wat kun je aflezen uit deze boxplots met betrekking tot de locatie, schaal en vorm van de onbekende verdeling van de data van de linker boxplot?
(De whiskers van de boxplots verbinden de box in dit geval met de meest extreme datapunten die niet meer dan 1.5 maal de interkwartiel afstand van de box aflaggen.)



Figuur 1: Boxplot van data uit onbekende verdeling en boxplot van steekproef uit normale verdeling met zelfde verwachting en standaardafwijking als onbekende verdeling.

2. Toen ook vrouwen gevechtspiloot konden worden, diende het ontwerp van schietstoelen te worden aangepast. Hieronder staan de gewichten in kg, naar grootte geordend, van 25 willekeurig gekozen vrouwen.

41	42	43	45	48
50	56	59	62	65
67	67	68	68	68
72	72	73	73	74
79	85	87	91	96.

Het steekproefgemiddelde is $\bar{x} = 66.0$ en de steekproefstandaarddeviatie is $s = 15.4$.

- a) Welke parameter wordt geschat met het steekproefgemiddelde?
- b) De oorspronkelijke schietstoelen waren ontworpen voor mannen met een gewicht tussen 63 en 95 kg. Bepaal op basis van relatieve frequentie een schatting voor de kans dat het gewicht van een vrouw tussen de 63 en 95 kg ligt.

Veronderstel nu dat het gewicht van vrouwen normaal verdeeld is met verwachting $\mu = 65$ kg en standaardafwijking $\sigma = 13$ kg.

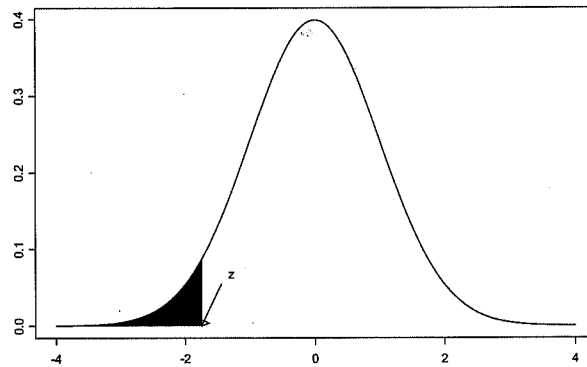
- c) Geef op basis van bovenstaande veronderstelling van de normaliteit van het gewicht van vrouwen een schatting voor de kans dat het gewicht van een willekeurige vrouw tussen de 63 en 95 kg ligt. Je kunt hiervoor bijgeleverde Tabel 5.1 gebruiken.
 - d) De schattingen van de kansen onder b) en c) verschillen. Noem twee mogelijke oorzaken.
 - e) Geef, op basis van bovenstaande veronderstelling van de normaliteit van het gewicht van vrouwen, de kans dat het gemiddelde gewicht van 25 vrouwen tussen de 63 en 95 kg ligt. Ook hiervoor kun je Tabel 5.1 gebruiken.
3. Beschouw het experiment waarbij iemand een zuivere munt opgooit en een zuivere dobbelsteen werpt.
- a) Construeer een kansruimte voor dit experiment.
 - b) Wat is binnen deze kansruimte de kans op de gebeurtenis 'kop en 6' en wat is de kans op de gebeurtenis 'kop of 6'?
 - c) Zij A de gebeurtenis 'kop en 6' en B de gebeurtenis 'kop of 6'. Zijn A en B onafhankelijk? Waarom (niet)?

Als bij het opgooien van de munt kop bovenkomt, krijgt de persoon 2 euro; als munt bovenkomt niets. Bovendien krijgt de persoon 1 euro als er 2 of 4 wordt gegooid met de dobbelsteen en 2 euro als er 6 wordt gegooid met de dobbelsteen.

- d) Beschouw binnen de kansruimte uit onderdeel a de stochastische variabele X die het totaal verkregen bedrag bij het experiment van de worpen met munt en dobbelsteen beschrijft. Construeer de kansfunctie $p(x) = P(X = x)$ van X netjes op basis van de formele definitie.
 - e) Bereken de verwachting EX van X ; geef niet alleen de uitkomst, maar laat zien hoe je hier aan komt.
4. Bij toepassing van een leugendetector geldt: als de proefpersoon liegt, geeft het apparaat dit aan met kans 0.88; als de proefpersoon de waarheid vertelt, geeft het apparaat dit aan met kans 0.86. Bij het screenen van personen om veiligheidsredenen geldt dat bij het beantwoorden van een bepaalde vraag 99% van de personen de waarheid spreekt. Personen liegen of spreken de waarheid onafhankelijk van elkaar. Geef bij onderstaande onderdelen niet alleen het antwoord, maar laat zien hoe je hieraan komt en geef kort aan welke rekenregel of eigenschap van kansen je bij de berekening gebruikt.
(Je mag in je antwoord een breuk of product laten staan.)

- a) Wat is de kans dat bij het beantwoorden van de vraag drie willekeurige personen liegen?
 - b) Wat is de kans dat bij het beantwoorden van de vraag tenminste één van drie willekeurige personen liegt?
 - c) Wat is de kans dat bij het beantwoorden van de vraag de detector aangeeft dat een persoon liegt, als deze persoon in werkelijkheid de waarheid spreekt?
 - d) Wat is de kans dat bij het beantwoorden van de vraag de detector aangeeft dat een persoon liegt?
 - e) Wat is de kans dat bij het beantwoorden van de vraag een persoon de waarheid spreekt, gegeven dat de detector aangeeft dat hij liegt?
5. In opgave 2 zijn de gewichten gegeven van $n = 25$ vrouwen. Het steekproefgemiddelde van de gewichten is $\bar{x} = 66.0$ en de steekproefstandaarddeviatie $s = 15.4$. In deze opgave bepalen we op basis van deze gewichten een betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde μ van het gewicht van vrouwen. Op basis van de Centrale Limietstelling weten we dat, als n voldoende groot is, het gemiddelde van n gewichten met een kans van ongeveer 95% tussen de waarden $\mu - 2s_n/\sqrt{n}$ en $\mu + 2s_n/\sqrt{n}$ ligt.
- a) Leid uit deze kansuitspraak de *algemene uitdrukking* af voor een 95% betrouwbaarheidsinterval voor de onbekende waarde μ .
 - b) Geef op basis van deze algemene uitdrukking het 95% betrouwbaarheidsinterval voor μ uitgaande van de gegeven dataset.
 - c) Wat is de interpretatie van het in b) bepaalde interval?
 - d) Is het op grond van het gevonden betrouwbaarheidsinterval aannemelijk dat het populatiegemiddelde μ van het gewicht van vrouwen gelijk is aan $\mu = 65$ kg? Waarom (niet)?
 - e) Vind je het gebruik van de Centrale limietstelling voor deze data gerechtvaardigd? En als verondersteld mag worden dat het gewicht van vrouwen normaal verdeeld is? Licht beide antwoorden kort toe.
6. Voorstanders van de kilometerheffing beweren dat 90% van de autobezitters voor kilometerheffing is. Iemand die dit wat overdreven acht, neemt een steekproef van 100 autobezitters. Van deze 100 personen gaven er 84 aan voor kilometerheffing te zijn. We zijn geïnteresseerd in de vraag of deze uitslag een voldoende indicatie is dat minder dan 90% van personen in de populatie voor kilometerheffing is. Zij p de fractie van personen in de populatie die voor kilometerheffing is.
- a) Stel de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_a met betrekking tot de fractie p .
 - b) Bepaal de gebruikelijke (punt)schatting $\hat{p}$ voor p .
 - c) Bereken de standardscore z (toetsingsgrootheid) voor $\hat{p}$.

- d) Bepaal met behulp van Tabel 5.1 de P -waarde behorend bij deze score.
e) Wat is de conclusie van de toets bij een significantieniveau van 0.05?



Figuur 2: *Standaard normale curve corresponderend met Tabel 5.1.*

Rekenregels voor kansen bij het tentamen Toegepaste Statistiek

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ kansruimte

$A, B \in \mathcal{A}$ gebeurtenissen

$B_1, B_2, \dots, B_m$ een partitie van Ω met $P(B_i) > 0$ voor alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

Regel van Totale waarschijnlijkheid:

$$P(A) = \sum_{i=1}^m P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^m P(A | B_i) P(B_i)$$

Regel van Bayes:

$$P(B_r | A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^m P(A \cap B_i)} = \frac{P(A | B_r) P(B_r)}{\sum_{i=1}^m P(A | B_i) P(B_i)}$$

Tabel 5.1 Standard scores bij het tentamen Toegepaste Statistiek

Table 5.1 Standard Scores and Percentiles for a Normal Distribution
(cumulative values from the left)

Standard score	%	Standard score	%	Standard score	%	Standard score	%
-3.5	0.02	-1.0	15.87	0.0	50.00	1.1	86.43
-3.0	0.13	-0.95	17.11	0.05	51.99	1.2	88.49
-2.9	0.19	-0.90	18.41	0.10	53.98	1.3	90.32
-2.8	0.26	-0.85	19.77	0.15	55.96	1.4	91.92
-2.7	0.35	-0.80	21.19	0.20	57.93	1.5	93.32
-2.6	0.47	-0.75	22.66	0.25	59.87	1.6	94.52
-2.5	0.62	-0.70	24.20	0.30	61.79	1.7	95.54
-2.4	0.82	-0.65	25.78	0.35	63.68	1.8	96.41
-2.3	1.07	-0.60	27.43	0.40	65.54	1.9	97.13
-2.2	1.39	-0.55	29.12	0.45	67.36	2.0	97.72
-2.1	1.79	-0.50	30.85	0.50	69.15	2.1	98.21
-2.0	2.28	-0.45	32.64	0.55	70.88	2.2	98.61
-1.9	2.87	-0.40	34.46	0.60	72.57	2.3	98.93
-1.8	3.59	-0.35	36.32	0.65	74.22	2.4	99.18
-1.7	4.46	-0.30	38.21	0.70	75.80	2.5	99.38
-1.6	5.48	-0.25	40.13	0.75	77.34	2.6	99.53
-1.5	6.68	-0.20	42.07	0.80	78.81	2.7	99.65
-1.4	8.08	-0.15	44.04	0.85	80.23	2.8	99.74
-1.3	9.68	-0.10	46.02	0.90	81.59	2.9	99.81
-1.2	11.51	-0.05	48.01	0.95	82.89	3.0	99.87
-1.1	13.57	0.0	50.00	1.0	84.13	3.5	99.98

Note: The table shows percentiles for standard scores between -3.5 and +3.5, though much lower and higher standard scores are possible. (Appendix A has a more detailed standard score table.) The % column gives the percentage of values in the distribution less than the corresponding standard score.