

Proeftentamen Toegepaste Logica

December 1998

Opgave 1.

- a. Geef, in natuurlijke deductie van minimale logica, een bewijs van de formule $(A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow B$ dat een detour bevat en dat geen niet-ingetrokken assumpties bevat.
(5 punten)
- b. Beschouw $(A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow B$ als een simpel type. Geef de lambda-term en de type afleiding corresponderend met het bewijs uit het antwoord op vraag 1a (in simpel getypeerde λ -calculus à la Church).
(5 punten)
- c. Beta-reduceer de lambda-term gevonden in 1b naar β -normaalkvorm.
(5 punten)
- d. Geef het bewijs in natuurlijke deductie dat correspondeert met de lambda-term in β -normaalkvorm gevonden in 1c.
(5 punten)

Opgave 2.

- a. Formuleer het typeerbaarheidsprobleem.
(3 punten)
- b. Gebruik het typeringsalgoritme om te bepalen of de term $\lambda x.xx$ typeerbaar is in simpel getypeerde lambda-calculus à la Curry, en geef zo mogelijk het principle type.
(5 punten)
- c. Gebruik het typeringsalgoritme om te bepalen of de term $\lambda y.(\lambda x.xy)(\lambda z.z)$ typeerbaar is in simpel getypeerde lambda-calculus à la Curry, en geef zo mogelijk het principle type.
(5 punten)

Opgave 3.

- a. Geef de reductieregels voor de combinatoren S, K en I.
(3 punten)
- b. Geef de vertaling van de CL-term SII in λ -calculus.
(5 punten)
- c. Reduceer de CL-term SIIx naar normaalvorm.
(5 punten)
- d. Beta-reduceer de lambda-term gevonden in 3b naar β -normaalvorm.
(5 punten)

Opgave 4.

- a. Welke functies zijn definieerbaar in ongetypeerde λ -calculus?
(3 punten)
- b. Gebruik de fixpoint-combinator $Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ om te laten zien dat elke term een fixpoint heeft, in ongetypeerde lambda calculus.
(5 punten)

Opgave 5.

- a. Geef een voorbeeld van het gebruik van dependent types (afhankelijke types).
(3 punten)
- b. Een fragment van lambda calculus met dependent types correspondeert met een logica. Welke logica is dat?
(3 punten)
- c. We schrijven $A(x)$ voor een formule die mogelijkwijs vrije voorkomens van de variabele x bevat, en $A(N)$ voor het resultaat van het vervangen van die vrije voorkomens van x door de term N .
Laat in zien dat de formule $(\forall x.A(x)) \rightarrow A(N)$ een tautologie is in de logica bedoeld in 5b.
(5 punten)
- d. Geef de type afleiding in lambda P die correspondeert met het bewijs gevraagd in 5c.
(5 punten)

Opgave 6.

- a. Zij $2 : \mathbf{nat}$ en $t : \mathbf{bool}$. Geef de identiteit die toepasbaar is op de term 2 en die welke toepasbaar is op de term $\mathbf{bool}$, in beide gevallen in simpel getypeerde lambda calculus à la Church.
(2 punten)
- b. Geef de applicatieregels voor lambda calculus met polymorfe types.
(2 punten)
- c. Geef de polymorfe identiteit als lambda term en het bijbehorende type. Gebruik de officiële notatie van $\lambda P2$ à la Church.
(3 punten)
- d. Geef de instantie van de applicatieregels die laat zien hoe je de polymorfe identiteit kunt gebruiken om de identiteit op type $\mathbf{nat}$ te maken.
(3 punten)
- e. In lambda calculus definiëren we het type $\mathbf{nat}$, de polymorfe Church numerals en de term $\mathbf{succ}$ als volgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{nat} &= \Pi a : \star. (a \rightarrow a) \rightarrow a \rightarrow a, \\ C_n &= \lambda a : \star. \lambda s : a \rightarrow a. \lambda z : a. s^n(z) \\ \mathbf{succ} &= \lambda x : \mathbf{nat}. \lambda a : \star. \lambda s : a \rightarrow a. \lambda z : a. s(x \ a \ s \ z).\end{aligned}$$

Beta-reduceer de term $\mathbf{succ} \ C_2$ naar β -normaalvorm.

(5 punten)