

Tentamen Termherschrijfsystemen 9 augustus 2002

Waardering: 10 punten cadeau; er zijn zes opgaven, elk 15 punten waard.
het cijfer is het totaal gedeeld door 10.
Er zijn twee bladzijden. Succes!

1. Beschouw de ARS $A = (N^+, \rightarrow)$ met als objecten de positieve natuurlijke getallen $1, 2, 3, \dots$ en als reductierelatie $\rightarrow$:

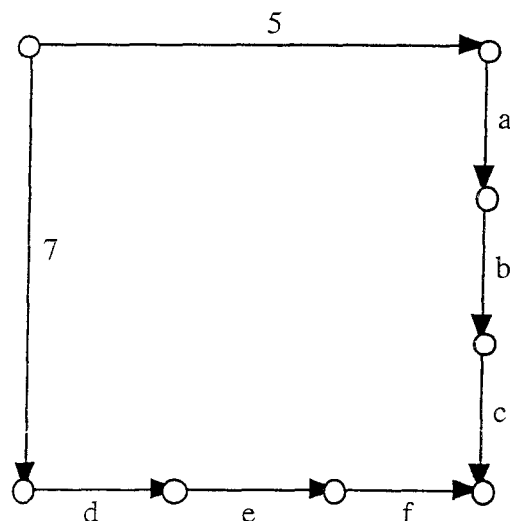
$n \rightarrow m$ als m een echt veelvoud is van n , d.w.z. $m = n \cdot k$ voor zekere $k > 1$. Dus bijv.

$3 \rightarrow 12$, maar niet $12 \rightarrow 12$.

- (i) Geef aan welke van de volgende zes eigenschappen deze ARS heeft (alleen de antwoorden zijn genoeg, bewijs is niet gevraagd): WN, SN, CR, WCR, UN^- , UN^+ .
- (ii) Geef enkele 'lagen' van de reductiegraaf van het getal 3 (ongeveer 10 getallen volstaan).

2. We werken in een ARS met reductierelaties die gelabeld zijn met natuurlijke getallen. We beschouwen de gewone ordening $<$ op de natuurlijke getallen. Bekijk de figuur hieronder. Door a, b, c, d, e, f een waarde (een natuurlijk getal) te geven, hebben we een elementair diagram (e.d.) met labeling. De vraag is welke van de volgende e.d's decreasing is. Alleen het antwoord ja/nee volstaat.

- (i) $a, b, c, d, e, f = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- (ii) $a, b, c, d, e, f = 6, 5, 4, 3, 2, 1$
- (iii) $a, b, c, d, e, f = 6, 6, 6, 5, 5, 5$
- (iv) $a, b, c, d, e, f = 5, 7, 7, 7, 5, 5$
- (v) $a, b, c, d, e, f = 4, 7, 6, 5, 6, 6$



3. We werken met de bekende "AMS0" TRS voor optelling en vermenigvuldiging. Er is in de signatuur een constante 0, een unaire S (successor), een binaire A en een binaire M. De reductieregels zijn dus:

$$A(x, 0) \rightarrow x$$

$$A(x, S(y)) \rightarrow S(A(x, y))$$

$$M(x, 0) \rightarrow 0$$

$$M(x, S(y)) \rightarrow A(x, M(x, y))$$

Aan deze vier regels voegen we er twee toe:

$$S(P(x)) \rightarrow x$$

$$P(S(x)) \rightarrow x$$

waarbij we dus de signatuur uitbreiden met een unaire P (predecessor). Het resultaat, met de zes regels heet R .

- (i) Is R orthogonal? Weakly orthogonal? CR?
- (ii) Is R SN? Zo nee, geef een tegenvoorbeeld, zo ja, beschrijf hoe je dat kunt bewijzen; maar het volledige bewijs wordt *niet* gevraagd.
- (iii) We gaan nu infinitair herschrijven met R . Bekijk de oneindige term $S(P(S(P(S(P(S(P(...$), d.i. de term die bestaat uit een enkele oneindige tak van alternerend S en P . Wat zijn de reducten van deze term? Heeft hij een (infinitaire) normaalvorm?

4. We werken in CL .

- (i) Reduceer de term $SISISI$ zo mogelijk naar normaalvorm.
- (ii) M is de term SKI . Bewijs dat alle termen $M, MM, MMM, MMMM, MMMMM, \dots, M \dots M$ (n keer M) aan elkaar gelijk zijn. (Dus bv. MMM is de term $SKI(SKI)(SKI)$).

5. Gegeven is het 'string rewrite system' S met alfabet $\{a,b\}$ en de vier reductieregels als in Tabel 1.

- (i) Wat zijn de normaalvormen van S ? Geef een reductie van het woord $abba$ naar normaalvorm.
- (ii) Bewijs dat S de eigenschap SN heeft, m.b.v. de IPO methode (ook wel RPO genoemd, dus m.b.v. de *-methode).

6. We werken weer met het string rewrite system uit de vorige opgave. Bewijs dat S confluent is, door de kritieke paren te bekijken. (Vermeld gebruikte stellingen.)

$ab \rightarrow bbba$
$ba \rightarrow a$
$aa \rightarrow bbbb$
$bb \rightarrow b$

Tabel 1.