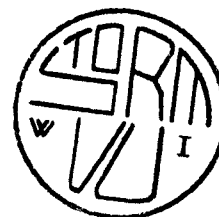


Tentamen Termherschrijfsystemen

21 juni 2002



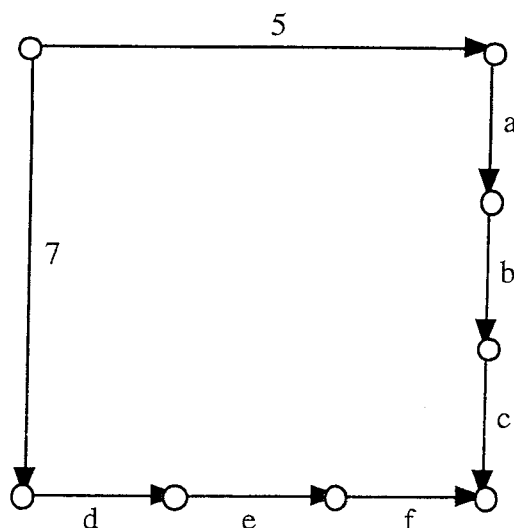
*Waardering: 10 punten cadeau;
 15 punten per opgave voor de opgaven 3, 5, 6, 7;
 10 punten per opgave voor de andere opgaven;
 het cijfer is het totaal gedeeld door 10.
 Er zijn drie bladzijden. Succes!*

1. Beschouw de ARS $A = (N^+, \rightarrow)$ met als objecten de positieve natuurlijke getallen $1, 2, 3, \dots$ en als reductierelatie $\rightarrow$:

$n \rightarrow m$ als m een echte deler is van n , d.w.z. een deler ongelijk 1 en n . Dus bijv. $12 \rightarrow 3$, maar niet $12 \rightarrow 12$ of $12 \rightarrow 1$.

- (i) Geef aan welke van de volgende zes eigenschappen deze ARS heeft (alleen de antwoorden zijn genoeg, bewijs is niet gevraagd): WN, SN, CR, WCR, $UN \rightarrow$, $UN =$.
- (ii) Geef de reductiegraaf van het getal 24.

2. We werken in een ARS met reductierelaties die gelabeld zijn met natuurlijke getallen. We beschouwen de gewone ordening $<$ op de natuurlijke getallen. Bekijk de figuur hiernaast. Door a, b, c, d, e, f een waarde (een natuurlijk getal) te geven, hebben we een elementair diagram (e.d.) met labeling. De vraag is welke van de volgende e.d.'s decreasing is. Alleen het antwoord ja/nee volstaat.



- (i) $a, b, c, d, e, f = 1, 1, 1, 1, 1, 1$
- (ii) $a, b, c, d, e, f = 1, 7, 5, 2, 5, 3$
- (iii) $a, b, c, d, e, f = 1, 7, 5, 5, 5, 5$
- (iv) $a, b, c, d, e, f = 7, 1, 5, 7, 1, 5$
- (v) $a, b, c, d, e, f = 7, 7, 7, 5, 5, 5$

3. We werken in deze opgave met streams (oneindige rijen) van natuurlijke getallen.

- (i) De operatie zip neemt twee streams σ en τ , begint met het eerste element van σ , en neemt dan alternerend een element van σ en van τ . Geef een TRS voor zip.
- (ii) We definiëren een stream $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ als volgt:

$$a_{2n+1} = 1 \text{ voor } n \geq 0,$$

$$a_{2n} = n \text{ voor } n \geq 1.$$

Schrijf de eerste 10 elementen van deze stream op, en geef een TRS (en een start term) die deze stream genereert.

(iii) In infinitair termherschrijven is er een belangrijke eigenschap van convergentie voor oneindige reducties, om hun welgedefinieerdheid te garanderen. Welke eigenschap is dat, en heeft de reductie die je net gevonden hebt, deze eigenschap?

4. We werken in infinitair termherschrijven, met de bekende “AMS0” TRS voor optelling en vermenigvuldiging. Er is in de signatuur een constante 0, een unaire S (successor), een binaire A en een binaire M. De reductieregels zijn dus:

$$A(x, 0) \rightarrow x$$

$$A(x, S(y)) \rightarrow S(A(x, y))$$

$$M(x, 0) \rightarrow 0$$

$$M(x, S(y)) \rightarrow A(x, M(x, y)).$$

(i) De oneindige term S^ω bestaat uit een oneindige tak van S-en. Bekijk nu de oneindige term $A(S^\omega, S^\omega)$. Geef een oneindige reductie naar een oneindige normaalvorm (als die er is). Geef ook een reductie naar een oneindige normaalvorm van $A(S^\omega, S^n(0))$.

(ii) Wat zijn de normaalvormen (eindig of oneindig), als we ons beperken tot termen waarin geen variabelen $x, y, z, \dots$ voorkomen? (Dus gesloten termen, of ‘ground’ termen.)

5. Beschouw eindige rijtjes opgebouwd uit de cijfers 0,1,...,9. We willen de cijfers in zo’n rijtje in de goede volgorde zetten, van klein naar groot. Hiertoe gebruiken we reductieregels die *aanliggende* cijfers verwisselen die niet in de goede volgorde staan. Dus bijv. $\dots 7 \ 5 \ \dots \rightarrow \dots 5 \ 7 \ \dots$.

(i) Bewijs dat deze TRS de eigenschap SN heeft, met de IPO methode (ook wel RPO genoemd in oudere syllabus).

(ii) Is de TRS orthogonal? Zo nee, geef enkele kritieke paren.

(iii) Bewijs dat de TRS CR is, door naar de kritieke paren te kijken.

6. We werken in CL. Reduceer zo mogelijk naar normaalvorm:

(i) SKSKSK.

(ii) SISSSII.

(iii) Heeft de term in (ii) een normaalvorm? Zo nee, kun je dat bewijzen?

13 augustus 1999

7. We bekijken weer de AMS0 TRS met reductieregels als in Opgave 4. Dit is R_1 . We breiden de signatuur uit met drie unaire functiesymbolen B , C , D . Er zijn reductieregels voor B, C, D als volgt:

$$B(B(B(x))) \rightarrow B(x)$$

$$C(C(x)) \rightarrow C(x)$$

$$D(D(x)) \rightarrow D(D(D(x))).$$

R_2 is de TRS met B en C en de reductieregels voor B en C . R_3 is de TRS met alleen de reductieregel voor D .

- (i) Bewijs met de stelling van Middeldorp-Rusinowitch dat $R_1 \cup R_2$ SN is. Je mag gebruiken dat AMS0 SN is, zonder bewijs.
- (ii) Bewijs dat $R_2 \cup R_3$ CR is.
- (iii) Bewijs dat $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ CR is.

=====

