

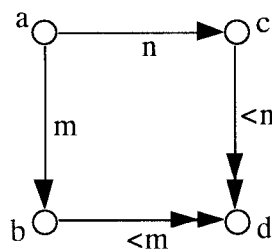
Tentamen Termherschrijfsystemen

23 juni 2000

Waardering: 10 punten cadeau; elk van de 6 opgaven is 15 punten waard; het cijfer is het totaal gedeeld door 10. Er zijn vier bladzijden. Succes!

1. Gegeven is een ARS $\mathcal{A} = \langle A, \rightarrow_n \rangle$ met voor elk natuurlijk getal n een reductierelatie $\rightarrow_n$. We schrijven $a \rightarrow_{<n} b$ als er een reductie van a naar b is ($a, b \in A$) met stappen met indices $< n$. de ARS $\mathcal{A}$ heeft met de eigenschap WCR in de volgende vorm:

$\forall a, b, c \in A \exists d \in A (a \rightarrow_n c \ \& \ a \rightarrow_m b \Rightarrow c \rightarrow_{<n} d \ \& \ b \rightarrow_{<m} d)$. (Zie Figuur 1.)



Figuur 1

Bewijs dat $\mathcal{A}$ de eigenschap CR heeft.

2. Beschouw de TRS met constanten A, A', B, B' , en binaire F, G . De TRS R heeft 8 reductieregels als in Tabel 1.

- (a) Is R orthogonaal?
- (b) Bepaal de reductiegraaf van de term $F(A, A)$. (Deze bestaat uit 8 termen.)
- (c) Stel vast of de volgende eigenschappen gelden voor R : WN, SN, CR.

$F(A, A) \rightarrow G(B, B)$	$G(B, B) \rightarrow F(A, A)$
$A \rightarrow A'$	$B \rightarrow B'$
$F(A', x) \rightarrow F(x, x)$	$G(B', x) \rightarrow G(x, x)$
$F(x, A') \rightarrow F(x, x)$	$G(x, B') \rightarrow G(x, x)$

Tabel 1

3. We werken met de verzameling van oneindige rijen natuurlijke getallen ('streams'). Als x een natuurlijk getal is, en y een stream, is $x:y$ het resultaat verkregen door stream y van het prefix x te voorzien. We willen een orthogonale TRS maken met een unaire operator search die streams herkent waarin minstens twee keer een 0 voorkomt. Neem als output de constante OK. Dus bijv.

search (3:7:0:8:9:0:5:...) $\rightarrow$ OK.

(Als de stream x niet minstens twee 0-en bevat, hoeft search x niet naar een normaalvorm te reduceren.)

- (a) Geef zo'n TRS.
 - (b) Specificeer eveneens met een TRS regel de stream van 1-en: ones = 1:1:1:1..
- Geef de oneindige reductie van

search ones.

Wat is er te zeggen van deze reductie?

- (c) Leg uit wat de eigenschap UN^∞ is, en geef aan waarom de TRS uit (a) die eigenschap inderdaad heeft.

4. Gegeven is de TRS R met de 7 regels in tabel 2:

$\begin{aligned}g(x,x,y) &\rightarrow x \\g(x,y,x) &\rightarrow x \\g(y,x,x) &\rightarrow x \\h(k(x)) &\rightarrow k(k(k(h(x)))) \\p(x) &\rightarrow q(x) \\q(x) &\rightarrow r(x) \\r(x) &\rightarrow s(x).\end{aligned}$
--

Tabel 2

(Dus R heeft een ternair symbool g , en unaire h , k , p , q , r en s .)

(a) Bewijs dat R de eigenschap SN heeft.

(b) Bewijs dat R ook de eigenschap CR heeft.

Noem de gebruikte stellingen.

5. Gegeven is de TRS R met de 3 regels in Tabel 3. (Er is dus een constante a , een unaire f , g , en een unaire h .)

Bewijs dat R de eigenschap WCR heeft.

$\begin{aligned}f(x) &\rightarrow a \\f(x) &\rightarrow g(f(x)) \\g(f(x)) &\rightarrow f(h(x))\end{aligned}$
--

Tabel 3

6. Gegeven is de applicatieve TRS $CL_{I,J}$ met constanten I en J , binaire applicatie $.$, en de twee reductieregels in Tabel 4. Hierbij zijn x,y,z,u variabelen; applicatie wordt net als in CL geschreven, dus (st) staat voor $(s.t)$. Als in CL gebruiken we de conventie van 'associatie naar links'.

$Ix \rightarrow x$ $Jxyz \rightarrow xy(xuz)$

Tabel 4

- (a) Reduceer de term $IIIXI$ tot normaalvorm.
- (b) Geldt CR voor $CL_{I,J}$?
- (c) Is er een $CL_{I,J}$ -term die zowel een normaalvorm als een oneindige reductie heeft?
- (d) ~~We bekijken de infinitaire versie van $CL_{I,J}$. Geef een tegenvoorbeeld tegen CR^∞ .~~
- (e) Een onlangs ontdekt feit, nog niet gepubliceerd, is dat alle pure J-termen SN zijn. (Een pure J-term is alleen uit J's en applicatie opgebouwd.)

Waar zit de fout in de volgende redenering:

De pure I-termen zijn ook allemaal SN. Dus volgt met de stelling van Middeldorp en Rusinowitch dat alle $CL_{I,J}$ -termen SN zijn.

=====

NR

6(d) verval!