



Tentamen Termherschrijfsystemen 26 juni 1998

Voor het hele tentamen: alle opgaven maken, tijd 3 uur.

Voor het verkorte tentamen: opgave 1 t/m 4, opgave 5 alleen de antwoorden, opgave 6 niet, tijd 2 1/4 uur.

Waardering:

1	1 punt
2	1,5 punt
3	1 punt
4	1 punt
5, antwoorden	1,5 punt
5, motivering	1,5 punt
6	1,5 punt

U krijgt 1 punt cadeau. Het resultaat van het verlichte tentamen (maximaal 7 punten) wordt verrekend met het huiswerk.

Opgave 1

Gegeven is de ARS met objecten $2, 3, 4, 5, \dots$ en reductierelatie $\rightarrow$ gedefinieerd door:

$$n \rightarrow m \text{ als } m \text{ een deler is van } n, \text{ en } m \neq n.$$

Bijvoorbeeld $12 \rightarrow 4 \rightarrow 2$.

1. Wat zijn de normaalvormen van deze ARS?

2. Geldt CR? En SN?

Motiveer uw antwoorden.

Opgave 2

Bescouw de TRS R met reductieregels:

$$f(f(x)) \rightarrow f(x) \quad (1)$$

$$g(g(x)) \rightarrow f(x) \quad (2)$$

$$f(g(x)) \rightarrow g(x) \quad (3)$$

$$g(f(x)) \rightarrow g(x) \quad (4)$$

1. Geef alle gevallen aan van overlap tussen de reductieregels.

2. Bepaal de bijbehorende kritieke paren van R.

3. Zijn alle kritieke paren convergent? Ga na.

4. Heeft R de eigenschap CR? Motiveer uw antwoord.

Opgave 3

Beschouw de volgende regels voor minus and quotiënt op natuurlijke getallen, die worden gerepresenteerd door $0, s(0), s(s(0)), \dots$. Merk op dat deze regels inderdaad aftrekking en deling beschrijven, als het “kan”. (Dat wil bv. zeggen: $m - n$ alleen als $m \geq n$, etc.)

$$\text{minus}(x, 0) \rightarrow x \quad (5)$$

$$\text{minus}(s(x), s(y)) \rightarrow \text{minus}(x, y) \quad (6)$$

$$\text{quot}(0, s(y)) \rightarrow 0 \quad (7)$$

$$\text{quot}(s(x), s(y)) \rightarrow s(\text{quot}(\text{minus}(x, y), s(y))) \quad (8)$$

1. Bewijs dat de TRS confluent is.
2. Bewijs met de *-methode (rpo) dat de TRS SN is.

Opgave 4

Deze opgave gaat over Combinatorische Logica (CL).

1. Reduceer de term $SKIx$ op alle mogelijke manieren naar normaalvorm.
2. Bepaal de term $K^* = [x][y]y$ en laat zien dat $K^*xy \rightarrow y$.
3. Laat zien dat voor de term $F \equiv YK$ geldt dat $Fx = F$.
4. Heeft F een normaalvorm? (bonusvraag).

Opgave 5

We herhalen de definitie van het begrip *sub-ARS*

Let $\mathcal{A} = (A, \rightarrow_\alpha)$ and $\mathcal{B} = (B, \rightarrow_\beta)$ be two ARSs. Then $\mathcal{A}$ is a *sub-ARS* of $\mathcal{B}$, denoted by $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, if the following conditions are satisfied.

- (i) $A \subseteq B$
- (ii) α is the restriction of β to A , that is,

$$\forall a, a' \in A (a \rightarrow_\beta a' \Leftrightarrow a \rightarrow_\alpha a').$$

- (iii) A is closed under β , i.e. $\forall a \in A \forall b \in B (a \rightarrow_\beta b \Rightarrow b \in A)$.

We noemen een eigenschap P van ARS-en *downward preserved* als

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \ \& \ P(\mathcal{B}) \Rightarrow P(\mathcal{A})$$

En we noemen een eigenschap P van ARS-en *upward preserved* als

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \ \& \ P(\mathcal{A}) \Rightarrow P(\mathcal{B})$$

1. Zij $\text{NF}(\mathcal{A})$ de verzameling normaalvormen van $\mathcal{A}$, en $\text{NF}(\mathcal{B})$ van $\mathcal{B}$. Ga na of de volgende implicatie geldt:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \text{NF}(\mathcal{A}) \subseteq \text{NF}(\mathcal{B}).$$

2. Ga van de eigenschappen CR, WCR, WN en $\text{UN}^{\rightarrow}$ na of ze downward respectievelijk upward preserved zijn.

NB: Voor het verlicht tentamen volstaat een tabel met de antwoorden. Voor het volledige tentamen dienen de antwoorden te worden gemotiveerd.

Opgave 6

In deze opgave bewijzen we stapsgewijs confluentie voor CL uitgebreid met constanten T, F en een ternair functiesymbool C en regels:

$$C(T, x, y) \rightarrow x \tag{9}$$

$$C(F, x, y) \rightarrow y \tag{10}$$

$$C(z, x, x) \rightarrow x \tag{11}$$

1. Bewijs SN voor de 3 C -regels.
2. Bewijs WCR voor de 3 C -regels.
3. Bewijs CR voor de 3 C -regels.
4. Bewijs CR voor de combinatie van de 3 C -regels met CL.