

Opgave 1

- Geef de definities van zwakke normalisatie (WN) en sterke normalisatie (SN) voor ARSen, en geef een voorbeeld van een ARS dat WN maar niet SN is. (6 ptn.)
- Geef de definities van confluentie (CR) en de normaalvorm eigenschap (NF) voor ARSen, en geef een voorbeeld van een ARS dat NF maar niet CR is. (6 ptn.)
- Laat $\langle A, \{\rightarrow_i\}_{i \in I} \rangle$ een ARS zijn, en $<$ een wel-gefundeerde ordening op I .

- Bewijs m.b.v. decreasing diagrams, dat als geldt:

$$\forall a, b, c \in A, \forall i, j \in I, \exists d \in A (a \rightarrow_i b \ \& \ a \rightarrow_j c \Rightarrow b \rightarrow_J d \ \& \ c \rightarrow_K d)$$

waarbij de labels in J en K alle kleiner zijn dan i of j , dan is het ARS confluent. (6 ptn.)

- Bewijs m.b.v. een multiset argument, dat als geldt:

$$\forall a, b, c \in A, \forall i, j \in I (a \rightarrow_i b \ \& \ a \rightarrow_j c \Rightarrow b \leftrightarrow_J^* c)$$

waarbij de labels in J alle kleiner zijn dan i of j (dus b is convertibel met c mbv stapjes die labels kleiner dan i of j hebben), dan is het ARS confluent. (6 ptn.)

Opgave 2

Laat E de volgende specificatie zijn:

$$a(b(a(x))) = x$$

(Dit is eigenlijk een string herschrijfsysteem, dus mag U voor het gemak haakjes weglaten.) We willen door completering een TRS R vinden die dezelfde gelijkheid ($=$) geeft als E , zodanig dat R confluent en terminerend is.

- Vind zo'n R door de vergelijking in E van links naar rechts te oriënteren en vervolgens 'critical pair completion' uit te voeren. Beargumenteer dat de gevonden TRS R confluent en terminerend is. (13 ptn.)
- Laat zien dat de 'beginregel' $a(b(a(x))) \rightarrow x$ overbodig is voor R . (4 ptn.)
- Is R nog confluent als we de regel

$$a(a(b(b(b(x)))))) \rightarrow b(b(a(x)))$$
toevoegen? (4 ptn.)
- Laat zien dat de TRS R^{inv} die ontstaat door zowel de linkerkanten als de rechterkanten van R te inverteren (als strings), dezelfde gelijkheid geeft als R . (b.v. inverteren van de regel $a(b(b(b(x)))) \rightarrow b(b(a(x)))$ geeft de regel $b(b(b(a(x)))) \rightarrow a(a(b(b(x))))$.) (8 bonus ptn.)

Opgave 3

Beschouw de volgende TRS (Σ, R) met signatuur Σ en regels R :

Σ bevat een constante nil , en binaire symbolen map , $cons$, app . Het binaire symbool app wordt (zoals in combinatorische logica) impliciet gelaten (b.v. xy staat voor $app(x, y)$). De herschrijfgeregels zijn:

$$\begin{aligned} map(x, nil) &\rightarrow nil \\ map(x, cons(y, z)) &\rightarrow cons(xy, map(x, z)) \end{aligned}$$

- Bewijs dat deze TRS sterk normaliserend is. (15 ptn.)
- Bewijs dat deze TRS confluent is. (5 ptn.)

- c) Breid de TRS (Σ, R) uit met constante 0, unair symbool S , en binair symbool A en regels:

$$A(0, x) \rightarrow x$$

$$A(S(x), y) \rightarrow S(A(x, y))$$

Deze regels op zich zijn confluent en terminerend. Is de resulterende TRS confluent en/of sterk normaliserend? Kunt U hiervoor modulariteitsresultaten gebruiken (zo ja, welke, zo nee, waarom niet)? (10 ptn.)

Opgave 4 Breid de TRS (Σ, R) uit de vorige opgave uit met constanten 0, S , en A en regels:

$$A0x \rightarrow x$$

$$A(Sx)y \rightarrow S(Axy)$$

(waarin weer het binaire functiesymbool *app* impliciet gelaten is.) Deze regels op zich zijn confluent en terminerend.

- a) Is de resulterende TRS confluent en/of sterk normaliserend? (hint: gebruik LPO) Waarom zijn modulariteitsresultaten hier niet van toepassing? (10 ptn.)
- b) Reduceer de term $map(A(S0), cons(0, cons(S0, nil)))$ naar normaalvorm mbv
 - a) parallel outermost strategie, (5 ptn.)
 - b) parallel innermost strategie. (5 ptn.)
- c) Geef een voorbeeld van een orthogonale TRS en een term waarvoor de leftmost-innermost strategie niet normaliserend is (d.w.z., herhaald toepassen van de leftmost-innermost strategie vindt geen normaalvorm van de term, maar de term heeft er wel een). (Dit onderdeel staat los van de twee voorgaande onderdelen.) (5 ptn.)

Het tentamencijfer is gelijk aan het tiende deel van het behaalde aantal punten, maar niet groter dan tien.