

Geef altijd voldoende uitleg bij je antwoorden! Het gebruik van een rekenmachine, een formuleblad of aantekeningen is niet toegestaan.

1. Stel $a < b$. Ga na of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Als de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Als de functie $|f|$ Riemann-integreerbaar is op $[a, b]$, dan is ook de functie f Riemann-integreerbaar op $[a, b]$.
- b) De functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is continu op $[a, b]$ en niet-negatief. De functie $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ is continu en stijgend op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b) . Dan is de functie

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

ook stijgend op $[a, b]$.

2. In deze opgave is $a < b$ en $n \in \mathbb{N}$. Verder is f een continue functie op $[a, b]$.

- a) Toon aan:

Als n even is en $\int_a^b t^n f(t) dt = 0$ dan bestaat er een $c \in [a, b]$ waarvoor geldt $f(c) = 0$.

- b) Toon aan dat de conclusie van opgave 2a) niet waar hoeft te zijn als n een oneven getal is.

3. Toon aan dat onderstaande oneigenlijke integraal (van de eerste en de tweede soort) convergent is:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx.$$

Z.O.Z.

4. Op $[-1, 1]$ definiëren we de functierij $(f_n(x))$ door:

$$f_n(x) = x^2(1 - x^{2n}), n \geq 1.$$

- a) Toon aan dat de functierij uniform convergeert op $[-a, a]$ voor iedere $0 < a < 1$.
 b) Onderzoek of er sprake is van uniforme convergentie op $[-1, 1]$.

5. a) Bewijs dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x + 2^n}$$

uniform convergent is op $[0, 2]$ en dat de somfunctie $f(x)$ continu is op $[0, 2]$.

b) Toon vervolgens aan:

$$\int_0^2 f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2^n} \right).$$

Normering:

1 : 5	2 : 4	3 : 5	4 : a) 3	5 : a) 3
	2		b) 2	b) 3
—	—	—	—	—
5	6	5	5	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{3} + 1$$