

Normering:

$$\begin{array}{llllll} 1a:5 & ; & 2a:5 & ; & 3a:5 & ; & 4:5 & ; & 5a:2 \\ b:5 & ; & b:2 & ; & b:3 & & & & b:3 \\ & & & & & & & & c:5 \\ & & & & & & & & d:5 \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = (\text{totaal}+5)/5$$

1. Laat $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ een Cauchy rij zijn.

(a) Bewijs dat $\{a_n^2\}$ een Cauchy rij is.

(b) Is de omgekeerde bewering ($\{a_n^2\}$ Cauchy $\implies \{a_n\}$ Cauchy) ook waar?

2. Laat, voor $n \geq 0$,

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}$$

en laat

$$g_k(x) = \sum_{n=0}^k f_n(x).$$

(a) Bewijs dat de rij $\{g_k\}$ uniform convergeert op ieder gesloten interval $[-a, a]$, als $k \rightarrow \infty$.

(b) Laat $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Bewijs dat G continu is op $\mathbb{R}$.

3. (a) Laat f en g begrensde, uniform continue, functies zijn op $\mathbb{R}$. Bewijs dat fg uniform continu is.

(b) Onderzoek of, in het vorige punt, de begrenstheid noodzakelijk is.

4. Onderzoek de convergentie van de oneigenlijke integraal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)}{x} dx.$$

5. Laat $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f_n(x) = (\cos(x))^n.$$

(a) Bewijs dat de rij $f_n(x)$ puntsgewijs convergeert als $n \rightarrow \infty$ en bereken de limiet $F(x)$.

(b) Is de convergentie uniform op $[-1, 1]$?

(c) Bewijs dat F Riemann-integreerbaar is.

(d) Bewijs dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx = \int_{-1}^1 F(x) dx.$$