Beknopte uitwerking tentamen
Wiskundige Analyse I

Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit, Amsterdam

Datum: 26-08-2005

(1) Zij $F(x)$ de functie uit de opgave. Dan geldt:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}} - \frac{K}{x+1} \\ &= \frac{(x+1) - K\sqrt{2x^2+1}}{(x+1)\sqrt{2x^2+1}} \cdot \frac{(x+1) + K\sqrt{2x^2+1}}{(x+1) + K\sqrt{2x^2+1}} \\ &= \frac{x^2(1-2K^2) + 2x + (1-K)}{((x+1)\sqrt{2x^2+1})((x+1) + K\sqrt{2x^2+1})} \\ &\asymp \begin{cases} 1/x & (K \neq 1/\sqrt{2}), \\ 1/x^2 & (K = 1/\sqrt{2}). \end{cases} \end{aligned}$$

De integraal convergeert dus precies dan wanneer $K = 1/\sqrt{2}$.

(2) (a) Als $x = 0$ dan $f_n(x) = 0$ voor elke n, dus $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
Als $x \neq 0$, dan is het duidelijk dat $f_n(x) \to 0$.
Dus (f_n) convergeert puntsgewijs naar de functie $f(x) = 0$.

(b) Merk op dat $\|f_n - f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x)$. Nu geldt:

$$f_n'(x) = \frac{n}{n^4+x^4} - \frac{nx}{(n^4+x^4)^2}4x^3 = \frac{n(n^4+x^4) - 4nx^4}{(n^4+x^4)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = n\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

Merk op dat $n\sqrt[4]{\frac{1}{3}} > 1$ als $n \geq 2$. Verder is $f_n'(x) > 0$ op $[0,1]$ als $n \geq 2$. Het maximum van $f_n(x)$ op $[0,1]$ wordt voor $n \geq 2$ dus aangenomen in 1. Dit betekent dat

$$\|f_n - f\| = \frac{n}{n^4+1} \longrightarrow 0 \qquad (n \geq 2).$$

(c) Uit (b) volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{n^4+x^4}\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

(3) (a) Zij $m \geq n$ willekeurig en beide oneven. Dan geldt:

$$a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - \cdots - a_{n-1} + a_n \leq a_m - a_{m+2} + a_{m+2} - \cdots - a_n + a_n = a_m.$$

Etc.

(b) Uit onderdeel (a) volgt voor $m > n$ and $x \in [0, a]$:

$$\left| \sum_{r=n+1}^{m} (-1)^{r+1} \frac{x^2 + r}{r^2} \right| \leq \frac{x^2 + (n+1)}{(n+1)^2} \leq \frac{a^2 + (n+1)}{(n+1)^2} \longrightarrow 0.$$

De reeks convergeert dus uniform op $[0, a]$. Zij nu $x \in \mathbb{R}$ willekeurig. Dan geldt:

$$\frac{x^2 + n}{n^2} \sim \frac{1}{n} \qquad (n \to \infty).$$

De reeks convergeert dus niet absoluut.

(4) (a) Kies $a_n \in B(x_n, 2^{-n-1}) \cap A$.

(b) Zij $\varepsilon > 0$. Er bestaat N_1 zodat $d(x_n, x_m) < 1/3\varepsilon$ voor alle $n, m \geq N_1$. Kies N_2 zo groot dat $2^{-N_2} < 1/3\varepsilon$. Voor $n, m \geq \max(N_1, N_2)$ geldt dan

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) &\leq d(a_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, a_m) \\ &< 1/3\varepsilon + 1/3\varepsilon + 1/3\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(c) Zij $x = \lim_{n\to\infty} a_n$. We beweren dat $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Zij $\varepsilon > 0$. Er bestaat N_1 zodat $d(a_n, x) < 1/2\varepsilon$ voor all $n \geq N_1$. Kies nu N_2 zo groot dat $2^{-N_2} < 1/2\varepsilon$. Dan geldt voor $n \geq \max(N_1, N_2)$ dat

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, a_n) + d(a_n, x) < 1/2\varepsilon + 1/2\varepsilon = \varepsilon,$$

hetgeen is zoals gewenst.