Beknopte uitwerking tentamen
Wiskundige Analyse I

Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit, Amsterdam

Datum: 31-05-2005

(1) Daar

$$\frac{Kx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1} = \frac{(2K-1)x^2+Kx-1}{(x^2+1)(2x+1)} \asymp \begin{cases} 1/x & (K \neq 1/2) \\ 1/x^2 & (K = 1/2), \end{cases}$$

convergeert de integraal precies dan wanneer $K = 1/2$.

(2) (a) Zij $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$, en zij (x_n) een rij in A met limiet x. Dan $f(x_n) \to f(x)$ en $g(x_n) \to g(x)$ vanwege continuïteit. Daar $f(x_n) = g(x_n)$ voor elke n, volgt $f(x) = g(x)$, i.e., $x \in A$.

(b) (i) $\Rightarrow$ (ii). Omdat $\{p\}$ open is, bestaat $\varepsilon > 0$ zodat $B_d(p,\varepsilon) = \{p\}$. Maar dan $d(p, X \setminus \{p\}) \geq \varepsilon > 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Zij $\varepsilon = d(p, X \setminus \{p\})$. Dan geldt $B_d(p, {}^1\!/\!_2\varepsilon) \cap (X \setminus \{p\}) = \emptyset$. Dus $p \notin \overline{X \setminus \{p\}}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Daar $X \setminus \overline{X \setminus \{p\}}$ open is, bestaat $\varepsilon > 0$ zodat $B_p(p,\varepsilon) \cap (X \setminus \{p\}) = \emptyset$. Maar dan $B_d(p,\varepsilon) = \{p\}$, i.e., $\{p\}$ is open.

(3) (a) Uit de continuïteit van de functie log volgt dat $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$. Maar dan

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log n}{nx^2} + \frac{\log x}{nx^2} + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2}$$

voor elke $x \in [1,3]$.

(b) Merk op: $(f_n - f)(x) = \frac{\log nx}{nx^2}$, en

$$(f_n - f)'(x) = \frac{-2\log(nx)}{nx^3} + \frac{1}{nx^2 \cdot x} = \frac{-2\log(nx)+1}{nx^3} = \frac{1-2\log(nx)}{nx^3}.$$

Dus $(f_n - f)'(x) < 0 \Leftrightarrow nx > \sqrt{e}$, en dit is het geval op $[1,3]$ voor elke $n \geq 2$.

(c) Uit (b) volgt dat voor $n \geq 2$ het maximum van de positieve functie $f_n - f$ op $[1,3]$ wordt aangenomen in 1. Dus $\|f_n - f\| = \frac{\log n}{n} \to 0$.

(d) Ten gevolge van de uniforme convergentie van de rij (f_n), geldt

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^3 f_n(x)\,dx = \int_1^3 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{3}.$$

(4) Voor elke $x \in [0,1]$, geldt

$$\left| \frac{x}{n^{3/2} + n^{3/4}x^2} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ convergent is, is de eerste reeks dus uniform convergent (Weierstrass). Voor de tweede reeks moeten we een beetje harder werken. Het maximum van de functie

$$x \mapsto \frac{x}{n^{3/4} + n^{3/2}x^2}$$

wordt aangenomen in $x = n^{-3/8}$ en heeft de waarde ${}^1\!/_2 n^{-9/8}$. Dit betekent dat de tweede reeks eveneens uniform convergent is vanwege het criterium van Weierstrass.