

Tentamen
Wiskundige Analyse I

Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit, Amsterdam

Datum: 31-05-2005

Alle antwoorden moeten zorgvuldig worden beargumenteerd. Geen rekenmachine, geen open boek, geen formuleblad.

- (1) Bepaal voor welke $K > 0$ de integraal

$$\int_2^\infty \left(\frac{Kx}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x + 1} \right) dx$$

convergeert.

- (2) (a) Zij (X, d) en (Y, d') metrische ruimten. Bewijs dat voor elk tweetal continue functies $f, g: X \rightarrow Y$ de verzameling

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

gesloten is in X .

- (b) Laat (X, d) een metrische ruimte zijn. Een punt p in X is *geïsoleerd* als $\{p\}$ open is. Bewijs dat de volgende uitspraken voor een punt p in X equivalent zijn:

(i) p is geïsoleerd,

(ii) $d(p, X \setminus \{p\}) > 0$,

(iii) $p \notin \overline{X \setminus \{p\}}$.

- (3) Voor elke $n \in \mathbb{N}$, zij $f_n \in C[1, 3]$ gegeven door

$$f_n(x) = \frac{\log(nx) + n}{nx^2}.$$

- (a) Bewijs dat de rij functies (f_n) puntsgewijs convergeert naar de functie $f(x) = x^{-2}$.
(Hint: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$. Dit hoeft u niet te bewijzen.)
(b) Bewijs dat voor $n \geq 2$ de functie $f_n - f$ monotoon dalend is op $[1, 3]$ (gebruik dat $\sqrt{e} \approx 1,648721$).
(c) Is de rij (f_n) uniform convergent op $[1, 3]$?
(d) Bereken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^3 \frac{\log(nx) + n}{nx^2} dx.$$

- (4) Bepaal of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{3/2} + n^{3/4}x^2} \quad \text{en} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{3/4} + n^{3/2}x^2}$$

uniform convergent zijn op $[0, 1]$.

- (a) Voor welke c is f continu in 0?
 (b) Voor welke c is f differentieerbaar in 0?

Zij (X, d) een metrische ruimte. Als $A \subseteq X$ en $x \in A$ dan heet x een *geïsoleerd punt* van A in X als er een open verzameling U is in X met $U \cap A = \{x\}$.

(4) Zij

$$A = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right).$$

Wat zijn de inwendige punten, de randpunten, de verdichtingspunten en de geïsoleerde punten van A in $\mathbb{R}$? Bepaal int A en $\bar{A}$.

U hoeft alleen de antwoorden te geven.

Normering								
1a	1b	2a	2b(i)	2b(ii)	2b(iii)	3a	3b	4
3	3	4	2	2	4	4	6	8

$$\text{eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten} + 4}{4}.$$