

Tentamen

Wiskundige Analyse 1

Donderdag 11 November 2004 (2 uur)

Afdeling Wiskunde

Faculteit der Exacte Wetenschappen

Vrije Universiteit Amsterdam

Beoordeling: startwaarde is 0.4; elke goede opgave levert 1.6 punt op.

Beantwoordingsinstructie: 6 opgaven.

Geen rekenmachine, geen open boek, geen formuleblad.

Alle antwoorden moeten zorgvuldig worden beargumenteerd.

1. Bewijs of weerleg:

- (a) Als $f \in C^1(\mathbb{R})$ voldoet aan $f'(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, dan is de functie f onbegrensd.
- (b) Als $f \in C^1(\mathbb{R})$ voldoet aan $f'(x) > 1/x$ voor alle $x \geq 1$, dan is de functie f onbegrensd.

2. Gegeven zijn twee functies $f, g \in C^1([0, 1])$ met $f(0) = g(1)$ en $f(1) = g(0)$.

- (a) Bewijs dat er een $c \in [0, 1]$ bestaat zodat $f(c) = g(c)$.
- (b) Bewijs dat er een $d \in (0, 1)$ bestaat zodat $f'(d) = -g'(d)$.
- (c) Bewijs dat er een $e \in (0, 1)$ bestaat zodat $g(e)f'(e) = -f(e)g'(e)$.

3. Gegeven is een functie $f \in C^1([a, b])$ met $f'(x) > 0$ voor $x \in [a, b]$. Laat f^{-1} de inverse van f zijn. Bewijs dat

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = bf(b) - af(a).$$

Aanwijzing: gebruik substitutie en partiële integreren.

4. De rij a_n is gegeven door $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ en $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{9}a_{n-2}$ voor $n \geq 2$.

We definiëren $b_n = a_n/a_{n-1}$.

- (a) Laat zien dat $b_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9b_n}$.
- (b) Toon met een contractie argument aan dat de rij b_n convergeert.
- (c) Bepaal de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- (d) Bepaal of de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert.

5. Gegeven is de reeks (voor $x \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{e^{nx} + n}.$$

- (a) Bepaal voor alle $x \leq 0$ of the reeks convergent of divergent is.
- (b) Laat zien dat $x^2 e^{-x} \leq 4e^{-2}$ voor $x > 0$.
- (c) Laat zien dat de reeks convergent is voor alle $x > 0$.

6. Gegeven is de rij

$$a_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{n \cos(x) + \cos(nx)}{4n + 2n \sin(x)} dx.$$

Bepaal de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Aanwijzing: laat eerst zien dat de rij functies $f_n(x) = \frac{n \cos(x) + \cos(nx)}{4n + 2n \sin(x)}$ uniform convergeert.