

Uitwerking tentamen 30 september 2003

1. (a) Voor $n = 1$ is het duidelijk. De parabool $f(x) = 2x(1 - x)$ is een bergparabool met maximum $\frac{1}{2}$, dus $x_{n+1} = f(x_n) \leq \frac{1}{2}$ voor alle n . Nu $x_n \geq 0$ met inductie: $x_1 \geq 0$ is OK; neem aan $x_n \geq 0$ en laat zien dat $x_{n+1} \geq 0$. De parabool $f(x)$ is positief voor $x \in (0, 1)$, dus $x_{n+1} \geq 0$ als $0 \leq x_n \leq 1$ en dat laatste volgt uit de inductieaanname samen met het feit dat $x_n \leq \frac{1}{2}$ voor alle n .
- (b) $x_{n+1} - x_n = x_n - 2x_n^2$. De parabool $g(x) = x - 2x^2$ heeft nulpunten bij $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}$ en is positief tussen deze nulpunten. Omdat $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ volgens onderdeel (a) volgt dus dat $x_{n+1} - x_n = g(x_n) \geq 0$ oftewel $x_{n+1} \geq x_n$.
- (c) Het is een stijgende rij die van boven is begrensd (door $\frac{1}{2}$) dus de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \in \mathbb{R}$ bestaat. Dan gaat ook $2x_n(1 - x_n)$ naar $2L(1 - L)$ als $n \rightarrow \infty$, dus in de limit gaat de vergelijking $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$ over in $L = 2L(1 - L)$. Deze vergelijking heeft oplossingen $L = 0$ en $L = \frac{1}{2}$. De mogelijkheid $L = 0$ is uitgesloten, want $x_n \geq x_1 = \frac{1}{4}$ voor alle n . Dus $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$ als $n \rightarrow \infty$.
2. (a) Omdat $f'' < 0$ zijn we drie mogelijkheden voor de tekenwisselingen van f' : of $f' > 0$ voor alle $x \in [0, 1)$, of $f' < 0$ voor alle $x \in [0, 1)$, of $f'(x_0) = 0$ voor een zekere $x_0 \in [0, 1)$ en $f' < 0$ voor alle $x \in (x_0, 1)$. In het eerste geval is $f(x)$ stijgend op $[0, 1)$ en omdat $f(x) \leq 1$ volgt dat $f(x)$ monotoon stijgend en van boven begrensd is, dus $f(x)$ gaat naar een limiet als $x \rightarrow 1$. In het tweede en derde geval is $f(x)$ dalend, tenminste vanaf $x = x_0$, en omdat $f(x) \geq 0$ volgt dat $f(x)$ monotoon dalend en van beneden begrensd is op $(x_0, 1)$, dus $f(x)$ gaat naar een limiet als $x \rightarrow 1$.
- (b) In elk punt $x \in [0, 1)$ is f continu omdat f differentieerbaar is in zo'n punt en differentieerbaarheid impliceert continuïteit. In $x = 1$ is f continu omdat voor elke rij $x_n \rightarrow 1$ geldt $f(x_n) \rightarrow f(1)$, want dat is hoe $f(1)$ gedefinieerd is.
3. De begrensdsheid van f' betekent dat er een $C > 0$ is zodat $|f'(x)| \leq C$ voor alle x . Voor elke x en $y \neq x$ in $\mathbb{R}$ geldt volgens de middelwaardestelling dat er een z tussen x en y bestaat zodat $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z)$. Dus

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y| \leq C|x - y|.$$

Om uniforme continuïteit te laten zien nemen we $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies dan $\delta = \varepsilon/C$ en er volgt dat $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ als $|x - y| < \delta$, precies zoals volgens de definitie van uniforme continuïteit wordt verlangd.

4. (a) De convergentie straal van de machtreeks is $R = 3$ want

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/n)/3^n n^3}{\cos(1/(n+1))/(3^{n+1}(n+1)^3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \frac{n^3}{(n+1)^3} = 3.$$

Dus de reeks is convergent voor $|x| < 3$ en divergent voor $|x| > 3$. De waarden $x = \pm 3$ moet je apart bekijken. Eerst $x = 3$: via de vergelijkingstest concludeer je dat de reeks convergent is want $0 < \frac{\cos(1/n)}{3^n n^3} < \frac{1}{n^3}$, en de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ is convergent. Nu $x = -3$: de reeks is nu absoluut convergent (zie voorgaande geval) dus zeker (gewoon) convergent. Conclusie de reeks is convergent voor $x \in [-3, 3]$ en divergent voor $|x| > 3$.

- (b) Met de substitutie $y = \tan x$ krijgen we $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n - \pi}$. De convergentiestraal van die machtreeks is $R = 1$ want $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n - \pi}{1/(n+1) - \pi} = 1$, dus de reeks is convergent

voor $|y| < 1$ en divergent voor $|y| > 1$. Het speciale geval $y = -1$ is convergent want dat is een uiteindelijk (voor $n > 4$) alternerende reeks waarvan de termen in absolute waarde naar nul dalen. Het geval $y = 1$ is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\pi}$, en omdat $\frac{1}{n-\pi} > \frac{1}{n}$ voor grote n kunnen we het vergelijkingscriterium gebruiken om te concluderen dat die reeks divergent is. We zien dus dat de reeks convergent is voor $y \in [-1, 1)$, oftewel voor $x \in [-\pi/4, \pi/4)$. De reeks is divergent voor alle andere waarden van x .

- (c) Voor (a): we kunnen de stelling gebruiken die zegt dat als $\|f_n\| \leq M_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergeert dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform. In dit geval $f_n = \frac{\cos(1/n)}{3^n n^3} x^n$, dus op het interval van convergentie $[-3, 3]$ geldt: $\|f_n\| = \frac{1}{n^3}$. Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ convergeert, is de convergentie van de functiereeks dus uniform op $[-3, 3]$.

Voor (b): we kunnen het criterium gebruiken dat de reeks uniform convergeert dan en slechts dan als voor elke $\varepsilon > 0$ er een N is zodat $\|\sum_{k=n}^m \frac{(\arctan)^k}{k-\pi}\| < \varepsilon$ voor alle $m > n > N$. Maar $\sup_{x \in [-\pi/4, \pi/4]} |\sum_{k=n}^m \frac{(\arctan)^k}{k-\pi}| \geq \sum_{k=n}^m \frac{1}{k-\pi}$, want laat x naar $\pi/4$ naderen, en $\sum_{k=n}^m \frac{1}{k-\pi} \geq \frac{m-n}{m-\pi} > \frac{(m-n)}{m}$. Dus $\|\sum_{k=n}^m \frac{(\log x)^k}{k}\|$ wordt niet klein voor grote n en m , bijvoorbeeld $n = m/2$ geeft $\|\sum_{k=m/2}^m \frac{(\arctan)^k}{k-\pi}\| > 1/2$ voor m willekeurig groot. Dus de convergentie is niet uniform.

5. (a) De limietfunctie $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{x}{x^2+2}$. Om te laten zien dat f_n uniform naar f convergeert moeten we laten zien dat $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Dus berekenen we

$$\|f_n - f\| = \left\| \frac{nx - 3 \sin(x/n)}{nx^2 + 2n} - \frac{x}{x^2 + 2} \right\| = \left\| \frac{-3 \sin(x/n)}{nx^2 + 2n} \right\| = \sup_{x \in [0, 2]} \left| \frac{-3 \sin(x/n)}{nx^2 + 2n} \right| \leq \sup_{x \in [0, 2]} \left| \frac{1}{nx^2 + 2n} \right| = \frac{1}{2n}.$$

Dus $0 \leq \|f_n - f\| \leq \frac{1}{2n}$ en volgens het vergelijkingscriterium gaat $\|f_n - f\|$ dus naar 0 als $n \rightarrow \infty$, oftewel f_n convergeert uniform naar f op $[0, 2]$ als $n \rightarrow \infty$.

- (b) Omdat de f_n uniform naar $f = \frac{x}{x^2+2}$ convergeert op $[0, 2]$, mogen we de limiet en integraal verwisselen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n(x) dx &= \int_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \\ &= \int_0^2 \frac{x}{x^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \ln 6 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln \frac{6}{2} = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$