
Tentamen
Wiskundige Analyse 1
voor studenten Econometrie

Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit Amsterdam

Datum: dinsdag 30 september 2003, 13:30–15:30 (2 uur)

Beoordeling: elk goed onderdeel levert 0.9 punt op.

Beantwoordingsinstructie: 5 opgaven; *alle antwoorden moeten zorgvuldig worden beargumenteerd.*

Geen rekenmachine, geen open boek, geen formuleblad.

1. Laat $x_1 = 1/4$ en $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$ voor elke $n \geq 1$.
 - (a) Bewijs dat $0 \leq x_n \leq 1/2$ voor alle $n \geq 1$.
(Hint: teken de bijbehorende parabool.)
 - (b) Laat zien dat $x_{n+1} \geq x_n$ voor alle $n \geq 1$.
 - (c) Toon aan dat de rij x_n convergeert en bepaal de limiet.
2. Laat f een twee keer differentiëerbare functie zijn op het half open interval $[0, 1)$.
Neem aan dat $0 \leq f(x) \leq 1$ op $[0, 1)$ en dat voor de tweede afgeleide geldt: $f''(x) < 0$ op $[0, 1)$.
 - (a) Laat zien dat de linker limiet $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ bestaat.
(Hint: beschouw de mogelijke tekenwisselingen van f' .)
 - (b) Definieer $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$. Leg uit waarom f continu is op $[0, 1]$.
(Hint: bekijk $x \in [0, 1)$ en $x = 1$ apart.)
3. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een differentiëerbare functie waarvoor geldt dat de afgeleide f' begrensd is op $\mathbb{R}$.
Toon aan dat f uniform continu is op $\mathbb{R}$.
(Hint: gebruik de middelwaardestelling).
4. Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeksen bij (a) en (b) convergeren:
 - (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(1/n)}{3^n n^3} x^n$.
 - (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan x)^n}{n - \pi}$.
 - (c) Bepaal of de functiereeksen bij (a) en (b) *uniform* convergent zijn op hun hele interval van convergentie.
5. We bekijken de rij functies
$$f_n(x) = \frac{nx - 3 \sin(x/n)}{nx^2 + 2n}.$$
 - (a) Bepaal de limietfunctie $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ en laat zien dat f_n uniform naar f convergeert op het interval $[0, 2]$.
 - (b) Laat zien dat
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \ln 3.$$