

Datum: vrijdag 22 augustus 2003, 13:30–15:30 (2 uur)

Beoordeling: elk goed onderdeel levert 1 punt op.

Beantwoordingsinstructie: 3 opgaven; *alle antwoorden moeten zorgvuldig worden beargumenteerd.*

Geen rekenmachine, geen open boek, geen formuleblad.

1. Bewijs of weerleg de volgende uitspraken:

- (a) Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent zijn, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ convergent.
- (b) Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is en $a_n > 0$, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ convergent.
- (c) Laat f een differentiëerbare functie zijn op het half open interval $[0, 1)$.
Als $([f(x)]^2)' < 0$ op $[0, 1)$ dan bestaat de linker limiet $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$.

2. Laat $x_1 = 1$ en $x_{n+1} = x_n(1 - x_n) + \frac{1}{n}$ voor elke $n \geq 1$.

- (a) Bewijs (bijvoorbeeld met inductie) dat $0 < x_n < 1$ voor alle $n \geq 3$, en dat $x_n < \frac{1}{2}$ voor alle $n \geq 6$.
- (b) Neem aan dat er een $n \geq 6$ bestaat zodat $x_n > \frac{1}{\sqrt{n}}$. Bewijs dat $x_n > x_{n+1} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
- (c) Bewijs dat de rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergeert en bepaal de limiet.
Hint: bekijk twee gevallen, namelijk de aanname van (b) geldt wel of geldt niet.

3. We bekijken een rij begrensde functies f_n die uniform naar f convergeert op $[a, b]$. Daarnaast is g een continue functie op $\mathbb{R}$.

- (a) Laat zien dat f een begrensde functie is. Laat ook zien dat de rij f_n uniform begrensd is, dat wil zeggen, er bestaat een $K > 0$ zodat $|f_n(x)| \leq K$ voor alle $x \in [a, b]$ en alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Toon aan dat $g(f_n) \rightarrow g(f)$ uniform op $[a, b]$.
- (c) Laat

$$h_n(x) = \frac{nx^2 e^{-\frac{nx^2}{nx+1}}}{nx+1} \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 1.$$

Bepaal de limietfunctie $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$ en laat (onder andere met behulp van onderdeel (b)) zien dat de convergentie $h_n \rightarrow h$ uniform is op $[0, 1]$.

- (d) Bepaal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^2 e^{-\frac{nx^2}{nx+1}}}{nx+1} dx.$$