

---

**Tentamen**  
**Wiskundige Analyse 1**  
**voor studenten Econometrie**

Afdeling Wiskunde  
Faculteit der Exacte Wetenschappen  
Vrije Universiteit Amsterdam

Datum: dinsdag 27 mei 2003, 13:30–15:30 (2 uur)

Beoordeling: elk goed onderdeel levert 1 punt op.

Beantwoordingsinstructie: 3 opgaven; *alle antwoorden moeten zorgvuldig worden beargumenteerd.*

Geen rekenmachine, geen open boek, geen formuleblad.

---

1. We introduceren de volgende eigenschap van functies: een functie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  heet *Lipschitz* als er een  $M > 0$  bestaat zodat  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$  voor alle  $x$  en  $y$  in  $[0, 1]$ .
  - (a) Bewijs: als een functie  $f$  Lipschitz is op  $[0, 1]$  dan is  $f$  begrensd op  $[0, 1]$ .
  - (b) Toon aan dat als  $f$  Lipschitz is op  $[0, 1]$  dan is  $f$  continu op  $[0, 1]$ .
  - (c) Bewijs: als  $f$  en  $g$  Lipschitz zijn dan is ook het product  $fg$  Lipschitz.
  - (d) Laat zien dat  $f(x) = \sqrt{x}$  *niet* Lipschitz is op  $[0, 1]$ .
2. Bepaal voor welke  $x \in \mathbb{R}$  de volgende reeksen convergeren:
  - (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{10 - n^2}$ .
  - (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x)^n}{n}$ .
  - (c) Bepaal of de functiereeksen bij (a) en (b) *uniform* convergent zijn op hun hele interval van convergentie.
3. We bekijken de functies  $f_n(x) = n^2 e^{-nx} \sin x$ .
  - (a) Bepaal  $\int_0^{\pi} f_n(x) dx$  door middel van twee maal partiële integreren.
  - (b) Bepaal
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} f_n \quad \text{en} \quad \int_0^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$
  - (c) We definiëren  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Bepaal of  $f_n$  uniform naar  $f$  convergeert op  $[0, \pi]$ .