

Datum: 24-08-2001, 13.30-15.30

Duur: 2 uur

Aantal opgaven: 5

Beantwoordingsinstructie: Maak opgaven 1 tot en met 5. Opgave 5 mag gemaakt worden voor opgave 4.

1. (20 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 punten) Geef de definities van elk van de vier onderstaande begrippen door de volgende zinnen af te maken. Geef vervolgens van (iii) ook nog de logische ontkenning.

(i) De rij reële getallen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ is een Cauchyrij als ...

(ii) Het reële getal S is het supremum (kleinste bovengrens) van de rij reële getallen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ als ...

(iii) De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is uniform continu als ...

(iv) De rij functies $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) is uniform convergent als ...

2. (20 = 5 + 5 + 5 + 5 punten) Geef van elk van de volgende uitspraken aan of ze waar of niet waar zijn. Motiveer uw antwoorden.

(i) De rij $(\frac{1}{1+\sqrt{n}})_{n=1}^{\infty}$ is convergent.

(ii) De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = \log(1 + x^2)$ is uniform continu.

(iii) De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = \log(1 + x^2) \sin \frac{1}{x}$ voor $x \neq 0$ en $f(0) = 0$ is differentieerbaar in $x = 0$.

(iv) De rij functies $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) gedefinieerd door $f_n(x) = e^{-n|x|}$ is uniform convergent.

3. (10 punten) Bewijs: als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu is in $p \in \mathbb{R}$ en de reële rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergent is met limiet p , dan is de rij $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ convergent met limiet $f(p)$.

4. (20 punten) Laat $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij reële getallen zijn met $0 \leq x_n \leq 1$. Laat

$$s_n = \inf_{k \geq n} x_k \quad \text{en} \quad S = \sup_{n \geq 1} s_n.$$

Bewijs dat er een convergente deelrij is van $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ met limiet S .

5. (20 punten) Laat $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Bewijs met behulp van de beweringen in vraagstuk 3 en 4 dat f uniform continu is op $[0, 1]$.

Eindcijfer: 1 plus het totaal gedeeld door 10.