

Tentamen Mechanica (23-10-2009)

Achter iedere opgave is een indicatie van de tijdsbesteding in minuten gegeven. De aangegeven tijd correspondeert ook met de te behalen punten, in totaal 90

Alleen gebruik van schrijfmateriaal is toegestaan.

Maak elke opgave op een apart vel (op ieder vel ook naam vermelden).

Opgave 1 (5+5+5)

De hoogte van een voorwerp ten op zichte van de grond (in meters) wordt gegeven door

$$h(t) = 105 + 20t - 5t^2,$$

waar t de tijd in seconden is. We kijken in deze opgave alleen naar de beweging in de verticale richting.

- (a) Geef de snelheid en versnelling (in verticale richting) als functie van de tijd en wat zijn de eenheden hiervan? Wat is de beginsnelheid?

(oplossing)

We krijgen de snelheid en versnelling door te differentiëren naar de tijd,

$$v(t) = dh/dt = 20 - 10t \text{ (in m/s)},$$

$$a(t) = dv/dt = -10 \text{ (in m/s}^2\text{)}.$$

De beginsnelheid is $v(0) = 20$ m/s.

- (b) Op welk tijdstip wordt het hoogste punt bereikt? Hoe hoog is dat?

(oplossing)

We kunnen kijken naar het tijdstip waarop $v(t) = 0$, waaruit volgt dat $t = 2$ s en die tijd invullen, wat geeft $h(2) = 125$ m of we kunnen $h(t)$ herschrijven als

$$h(t) = 125 - 5(t - 2)^2,$$

waaruit we alles direct aflezen.

- (c) Met welke snelheid komt het voorwerp op de grond en op welk tijdstip gebeurt dat. Wat was de gemiddelde snelheid van $t = 0$ tot het tijdstip waarop het voorwerp de grond raakt.

(oplossing)

Uit $h(t) = 0$ vinden we $t = 7$ s of $t = -3$ s (deze laatste tijd vervalst). De snelheid op dat tijdstip is $v(7) = -50$ m/s; de gemiddelde snelheid is

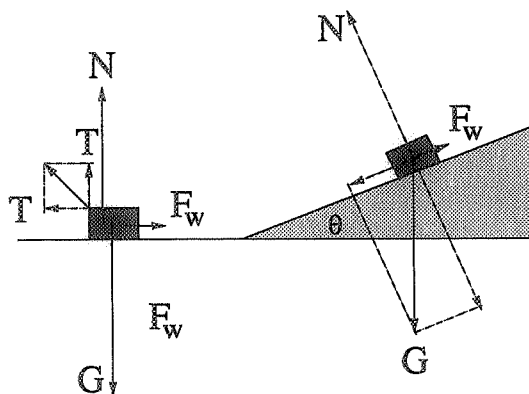
$$\bar{v} = \frac{h(7) - h(0)}{7 - 0} = \frac{0 - 105}{7} = -15 \text{ m/s}.$$

Opgave 2 (8+9+8)

Een doos glijdt van een hellend vlak (hellingshoek θ , waarvoor $\cos \theta = 12/13$ en $\sin \theta = 5/13$) en ondervindt op de helling een wrijvingskracht ter grootte van $F_w = \mu N$, waar N de normaalkracht is uitgeoefend door het oppervlak op de doos. Op het horizontale vlak aangekomen trekken we de doos verder over het horizontale deel, waarbij de trekkraft onder een hoek van 45 graden wordt uitgeoefend (aangegeven met pijl in de figuur). Gebruik $g = 10 \text{ m/s}^2$ en indien nodig voor 45 graden de $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.



- (a) Geef aan welke krachten er werken op de doos (vrije lichaamsdiagrammen voor beide getekende gevallen, op de helling en op horizontale deel; wat er bij de overgang van helling naar horizontaal gebeurt interesseert ons hier niet).
(oplossing)



In de figuur zijn de krachten ook al ontbonden in de richting langs de weg en richting loodrecht op de weg (stippellijnen). Die ontbinding is pas nodig bij de volgende onderdelen.

- (b) Bereken de nettokracht en daaruit de versnelling als de massa van de doos $M = 13$ kg en de dynamische wrijvingscoëfficiënt $\mu = 0.2$. Wat wordt de versnelling als de doos tweemaal zo zwaar is?
(oplossing)

Na ontbinding krijgen we op de helling:

$$N = G \cos \theta = 120 \text{ N} \quad (\text{loodrecht}),$$

$$F_{\text{net}} = G \sin \theta - \mu N = 50 - 0.2 \times 120 = 26 \text{ N} \quad (\text{parallel}).$$

Deze resulterende nettokracht van 26 N geeft de versnelling $a = F_{\text{net}}/M = 26/13 = 2 \text{ m/s}^2$. Deze versnelling is onafhankelijk van de massa!

- (c) Hoeveel arbeid moeten we verrichten om de doos over 100 m te verslepen met constante snelheid? Wat wordt de arbeid als de doos tweemaal zo zwaar is?
(oplossing)

Bij verslepen met constante snelheid is er geen nettokracht. De grootte van de componenten van de trekkracht zijn gelijk (T , de feitelijke trekkracht heeft dus grootte van $F_{\text{trek}} = T\sqrt{2}$). We krijgen nu:

$$N + T = G = 130 \text{ N} \quad (\text{loodrecht}),$$

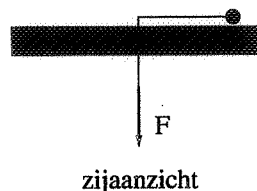
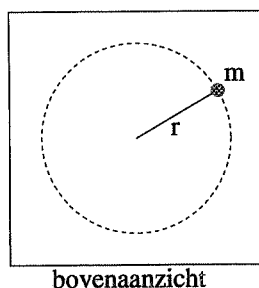
$$T = F_w = \mu N = 0.2 N.$$

waaruit we vinden dat $1.2 N = 130 \text{ N}$, oftewel $N \approx 108 \text{ N}$ en $T \approx 22 \text{ N}$. De arbeid (in dit geval van constante snelheid) is

$$W = T \Delta s = 2200 \text{ J}.$$

waarbij we de kracht langs de weg nodig hebben. Voor een tweemaal zo zware doos wordt de arbeid tweemaal zo groot!

Opgave 3 (5+5+5+5)



Een balletje met massa m is met een (massaloos) koord verbonden met het midden van een tafel zoals in de tekening aangegeven. De afstand tot het midden van de tafel is r . Het balletje krijgt een zet en gaat ronddraaien met snelheid v .

- (a) Wat is de kracht F waarmee aan het koord moet worden getrokken (wrijving op de tafel en bij het draaipunt verwaarlozend)?

(oplossing)

De kracht is

$$F = \frac{mv^2}{r}.$$

- (b) Nu wordt het balletje naar binnen getrokken totdat de afstand tot het draaipunt gehalveerd is, dus $r' = r/2$. Met welke snelheid beweegt het balletje nu? Wat is er gebeurd met de hoeksnelheid? Als er grootheden behouden zijn, leg dan uit waarom deze behouden zijn.

(oplossing)

Via het koord, wordt een centripetale kracht op het balletje uitgeoefend, ook bij het naar binnen trekken. Dus het krachtmoment t.o.v. het draaipunt is $r \times F = 0$ en het impulsmoment is behouden,

$$mvr = mv'r' = mv'r/2,$$

dus $v' = 2v$. De hoeksnelheden zijn $\omega = v/r$ en $\omega' = v'/r' = 4v/r = 4\omega$.

- (c) Is de kracht om het balletje in de eindsituatie van (b) vast te houden groter of kleiner dan die onder (a). Hoeveel arbeid hebben we verricht bij het verkleinen van de straal.

(oplossing)

De kracht om het balletje vast te houden is acht maal zo groot geworden. De kinetische energie was $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2r^2$ en is $\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m\omega'^2r'^2$ geworden, dus viermaal zo groot. We hebben dus een arbeid verricht ter grootte van $\frac{3}{2}mv^2$.

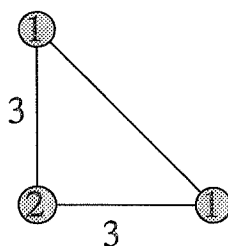
- (d) Het balletje breekt (op afstand $r' = r/2$) en verliest driekwart van zijn massa. Schets de baan van het fragment. Wat wordt de snelheid de restant van het balletje na het breken en hoe groot moet de straal worden om de resterende massa weer met de oorspronkelijke tangentiële snelheid v (uit onderdeel a) te laten draaien?

(oplossing)

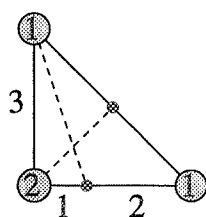
Het fragment beweegt tangentiël van de cirkel weg (langs raaklijn in breekpunt). Het restant en het afgebroken stuk hebben beiden een snelheid ter grootte van $v' = 2v$. Om op de cirkelbaan voor het restant weer v te krijgen moet de straal weer tweemaal zo groot worden.

Opgave 4 (5+5+5)

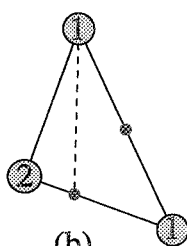
Gegeven zijn 3 massa's verbonden met starre verbindingen (waarvan de massa verwaarloosd wordt). De massa's zijn aangegeven, twee massa's ter grootte van m (aangegeven met 1) en een massa ter grootte van $2m$ (aangegeven met 2). De twee loodrechte verbindingen hebben lengtes $3a$ (aangegeven met 3's).



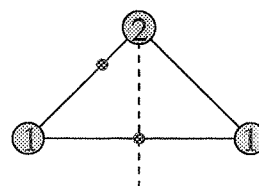
- (a) Geef in de figuur de zwaartepunten voor de twee massa's met massa m ? Idem voor het tweetal gevormd door een van de massa's m en de massa $2m$? Licht je antwoord toe. Geef het zwaartepunt van de drie massa's aan.
(oplossing)



(a)



(b)



(c)

Voor de twee gelijke massa's ligt het zwaartepunt op het midden van hun verbindingslijn. Voor de twee ongelijke massa's ligt het zwaartepunt op afstand a van de massa $2m$ en afstand $2a$ van de massa m . De twee massa's m kunnen vervangen worden door een massa $2m$ in hun zwaartepunt en het zwaartepunt van dit systeem en de andere massa ligt halverwege het $m - m$ zwaartepunt en de massa $2m$. Dat is overigens precies ook het snijpunt met de verbindingslijn van een $2m - m$ zwaartepunt naar de andere massa m (zie tekening a).

- (b) Bereken het traagheidsmoment om een as loodrecht op de driehoek door een van de massa's m (verwaarloos hierbij de uitgebreidheid van de afzonderlijke massa's); idem voor een as loodrecht op de driehoek door de massa $2m$.
(oplossing)

We vinden het traagheidsmoment door de massa's $2m$ en m te vermenigvuldigen met het kwadraat van de afstanden tot de as,

$$I_m = 2m(3a)^2 + m(3a\sqrt{2})^2 = 36ma^2.$$

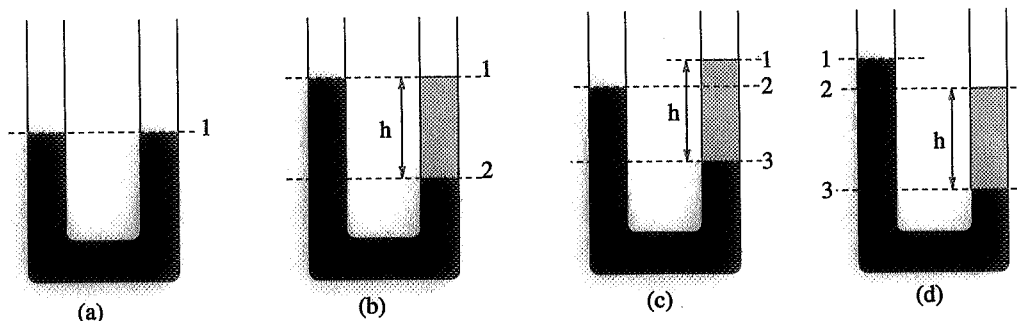
Voor het traagheidsmoment om een as door de massa $2m$ vinden we

$$I_{2m} = m(3a)^2 + m(3a)^2 = 18ma^2.$$

- (c) Schets de evenwichtssituaties wanneer we ons object bestaande uit 3 massa's ophangen aan de as door massa m of aan de as door massa $2m$. Geef toelichting (wat zijn de condities voor evenwicht?).
(oplossing)

De oplossing is gegeven in de figuren b en c hierboven. Het zwaartepunt van de andere twee massa's moet precies onder het ophangpunt liggen. Omdat de zwaartekracht op alle massa's naar beneden is gericht, is er in het ophangpunt een kracht naar boven gelijk aan het totale gewicht. Omdat de zwaartekracht op de twee massa's die niet het ophangpunt vormen aangrijpt in hun zwaartepunt, is in de geschetste situatie het krachtmoment precies nul (alle krachten liggen langs de verbindingslijn van ophangpunt naar zwaartepunt van twee andere massa's).

Opgave 5 (5+10)



- (a) We hebben de situatie in figuur (a): een U-buis met twee open uiteinden en daarin water ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$). De luchtdruk is $1000 \text{ mbar} = 10^5 \text{ Pa}$. Het waterniveau in beide buizen is gelijk. Wat is het daaraan ten grondslag liggende principe?

(oplossing)

In een onsamendrukbare vloeistof worden drukveranderingen ongedempt doorgegeven (principe van Pascal), wat voor één vloeistof betekent dat de druk op gelijke hoogtes gelijk is.

- (b) In het rechterbeen wordt olie gegoten met $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$. De hoogte van de kolom olie is $h = 50 \text{ cm}$. Wat is de eindsituatie (b, c, of d)? Wat is het hoogteverschil tussen het niveau van water links en olie rechts? Geef verder de druk in linker en rechterbuis op elk van de met stippellijnen aangegeven hoogtes (in de volgens jou correcte situatie). Gebruik hierbij $g = 10 \text{ m/s}^2$.

(oplossing)

De correcte eindsituatie is (c). De druk op hoogte 3 is links en rechts gelijk. Op hoogte 1 rechts is de druk $P_1 = 10^5 \text{ Pa}$. Op hoogte 3 rechts wordt het verschil met 1 gegeven door

$$P_3 - P_1 = \rho_{\text{olie}} gh = 4000 \text{ Pa},$$

dus $P_3 = 104000 \text{ Pa}$. De druk links is gelijk (Pascal's principe). De druk links bij 2 is de luchtdruk, $P_2 = 10^5 \text{ Pa}$. De kolom water die het verschil met P_3 geeft is 40 cm hoog. Het niveauverschil tussen water links en olie rechts is dus 10 cm .

[Voor mensen die ook druk van P_1 links geven, deze is 10^5 Pa en de druk rechts bij 2 is $P_2 = 100800 \text{ Pa}$, maar voor mensen die deze druk niet geven worden geen punten afgetrokken.]