

## Mechanica tentamen - 16 februari 2004

### 1. potentiaal

Gegeven is de potentiaal  $U(x) = U_0(\sin x^2 - x^2)$ . Een deeltje met massa  $m$  dat beweegt onder invloed van deze potentiaal bevindt zich op  $t = 0$  op  $x = 0$  en heeft dan een snelheid  $v = v_0$ .

- $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = 2U_0x(1 - \cos x^2)$
- $a(x) = \frac{F(x)}{m} = \frac{2U_0}{m}x(1 - \cos x^2)$
- $F(x) = mv\frac{dv}{dx} \Rightarrow 2U_0x(1 - \cos x^2) = mv\frac{dv}{dx} \Rightarrow \int 2U_0x(1 - \cos x^2) dx = \int mv dv$   
 $-U_0(\sin x^2 - x^2) = \frac{1}{2}m(v - v_0)^2$  dus  $v(x) = v_0 + \sqrt{\frac{2U_0}{m}(x^2 - \sin x^2)}$

### 2. knikker

- Voor HO  $F \propto -x$  dus  $U = -\int F dx \propto x^2$ . Stel  $U = \frac{1}{2}Ax^2$  dan is bww  $m\ddot{x} + Ax = 0$  met oplossing  $x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{A}{m}}t - \phi\right)$
- Bedenk dat  $U$  komt door de vorm van de kom plus gravitatie kracht. D.w.z.  $U(x) = mgh(x)$  in het bijzonder is  $U(\ell) = mgh(\ell)$  maar  $h(\ell) = \frac{1}{2}\ell$  volgens de gegevens. Dus  $U(\ell) = mg\frac{1}{2}\ell$  ook is  $U(\ell) = \frac{1}{2}A\ell^2$  en dus is  $A = \frac{mg}{\ell}$ . De periode is  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{A}{m}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{mg}{\ell}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
- Slinger met lengte  $\ell$  heeft teruggedrijvende kracht  $mg\frac{x}{\ell}$  dus bww  $m\ddot{x} + mg\frac{x}{\ell} = 0$  of  $\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0$  dus  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$  en  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$  dit is hetzelfde antwoord als bij b) QED

### 3. wiel

De traagheidsmomenten van de wielen zijn  $I = \frac{1}{2}MR^2$ ; de hoekverdraaiingen van beide wielen zijn  $\theta = x/R$  als  $x$  de lineaire verplaatsing van de as is.

- Voor wiel W uit krachten:  $Mg \sin \alpha - T_2 - f = M\ddot{x}$  en uit momenten:  $\ddot{\theta}I = fR$   
 Voor wiel V uit momenten:  $\ddot{\theta}I = (T_2 - T_1)R$   
 Voor massa  $m$  uit krachten:  $T_1 - mg = m\ddot{x}$   
 Uit geometrie  $\theta = x/R$  dus  $\ddot{\theta} = \ddot{x}/R$   
 Oplossen van deze 5 vergelijkingen geeft  $Mg \sin \alpha - mg = (M + m + \frac{2I}{R^2})\ddot{x}$  met  $I = \frac{1}{2}MR^2$  dus  $Mg \sin \alpha - mg = (2M + m)\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{Mg \sin \alpha - mg}{2M + m}$
- $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{Mg \sin \alpha - mg}{2M + m}t^2$

### 4. vrachtwagen

Merk op dat de snelheid van de vrachtwagen konstant is.

- $dp = (m + dm)v - mv = v dm$   
 $F = \frac{dp}{dt} = v \frac{dm}{dt} = v\mu$   
 vermogen:  $P = Fv = \mu v^2$
- $K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}v^2 = \frac{1}{2}\mu v^2$

- c. Om de snelheid van de regen gelijk te kunnen maken aan die van de vrachtwagen is wrijving nodig. Er wordt dus bewegingsenergie omgezet in warmte.

5. soldaat

- a. De zwaartekracht  $F_z = mg$ , de Coriolis schijnkracht  $F_C = -2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -2m\omega v \sin \lambda$  en de middelpuntvliedendeschijskracht  $F_{mv} = -m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = -m\omega^2 R \cos \lambda$  met  $\boldsymbol{\omega}$  rotatie snelheid en  $\mathbf{R}$  straal van de aarde.
- b. De tijd die de kogel onderweg is is  $T = \frac{x}{v}$ . De horizontale versnelling overdwars is  $a_C = -2\omega v \sin \lambda$  de horizontale snelheid overdwars is  $v_C = \int_0^T a_C dt = \int_0^{x/v} -2\omega v \sin \lambda dt = -2\omega x \sin \lambda$  de horizontale afwijking is  $\int_0^T v_C dt = \int_0^{x/v} -2\omega x \sin \lambda dt = -\frac{2\omega x^2}{v} \sin \lambda$  d.i. naar het Oosten.
- c. De verticale versnelling naar beneden is  $a_v = g - \omega^2 R \cos \lambda$  de verticale snelheid is  $v_v(t) = \int (g - \omega^2 R \cos \lambda) dt = t(g - \omega^2 R \cos \lambda)$  en de verticale afwijking is  $\int t(g - \omega^2 R \cos \lambda) dt = \frac{1}{2}t^2(g - \omega^2 R \cos \lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{v}\right)^2(g - \omega^2 R \cos \lambda)$  deze is naar altijd beneden.

6. bulkmodulus

- a.  $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow \frac{dV}{d\rho} = -\frac{m}{\rho^2}$  dus  $\frac{V}{dV} = \frac{\frac{m}{\rho}}{-\frac{m}{\rho^2}d\rho} = -\frac{\rho}{d\rho}$  dat invullen in  $K = -V \frac{dp}{dV}$  geeft  $K = \rho \frac{dp}{d\rho}$
- b.  $\Delta p = \rho g y$  dus  $\frac{dp}{dy} = \rho g$
- c. Uit b. volgt  $dp = \rho g dy$  dat invullen in  $K = \rho \frac{dp}{d\rho}$  geeft  $K = \rho \frac{\rho g dy}{d\rho}$  dus  $\frac{K}{\rho^2 g} d\rho = dy$  dus  $\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{K}{\rho^2 g} d\rho = \int_0^D dy$  en dus  $K \frac{\rho - \rho_0}{g \rho \rho_0} = D$  waaruit volgt  $\rho(D) = \frac{K \rho_0}{K - D g \rho_0}$