

Mechanica tentamen - 12 augustus 2003

1. Hagelkorrel: $F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow mg = \frac{d(mv)}{dt}$ met $m = \beta t^n$ volgt $(\beta t^n)g = \frac{d((\beta t^n)v)}{dt}$ of $gt^n = \frac{d(t^n v)}{dt}$ dus $\int gt^n dt = \int d(t^n v)$ en $\frac{1}{n+1}gt^{n+1} = t^n v$ dus $\frac{1}{n+1}gt = v$ en $a = \dot{v} = \frac{1}{n+1}g$
2. pirouettedraaister
 - a. $I = \Sigma mr^2 = 2m(r(t))^2 = 2m(r_0 - \beta t)^2$
 - b. $[0 = \frac{dL}{dt}]$ dus $I\omega = L = \text{const.}$ Op $t = 0$ is $L = 2mr_0^2\omega_0$ dus $\omega(t) = \frac{L}{I} = \frac{2mr_0^2\omega_0}{2m(r_0 - \beta t)^2} = \frac{r_0^2}{(r_0 - \beta t)^2}\omega_0 = \frac{1}{(1 - \frac{\beta t}{r_0})^2}\omega_0$
 - c. $L(t) = 2mr_0^2\omega_0$ er is geen extern moment dus hangt L niet van de tijd af.
 - d. $E_k(t) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}2m(r_0 - \beta t)^2 \left(\frac{r_0^2}{(r_0 - \beta t)^2}\omega_0 \right)^2 = m \frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0 - \beta t)^2}$
 - e. arbeid
 of Uit energie: $W = E_{r=r_1} - E_{r=r_0} = m \frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_1)^2} - m \frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0)^2} = mr_0^4\omega_0^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$
 of Uit kracht $\times$ weg: zij moet per arm de centripetale kracht $F = m\omega^2 r$ leveren.
 $W = \int_{r_0}^{r_1} 2m\omega^2 \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{r_0}^{r_1} 2m\omega^2 r dr$
 $W = - \int_{r_0}^{r_1} 2m \left(\frac{r_0^2}{(r_0 - \beta t)^2}\omega_0 \right)^2 r dr = - \int_{r_0}^{r_1} 2m \left(\frac{r_0^2}{r^2}\omega_0 \right)^2 r dr = -2mr_0^4\omega_0^2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r^3} dr =$
 $mr_0^4\omega_0^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$

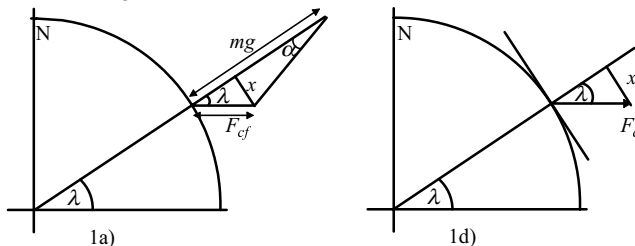
3. hellend vlak

Uit de geometrie en de bewegingsvergelijkingen volgt:

- | | | | |
|---------------------------|--|------------|---|
| geometrie: | $a_1 = 2a_2$ | oplossing: | $a_2 = g \frac{2m_1 \sin \theta - m_2}{4m_1 + m_2 + 2I_1/r_1^2 + I_2/r_1 r_2}$ |
| geometrie: | $T_{2a} = T_{1a} + T_{1b}$ | | $a_1 = 2a_2 = 2g \frac{2m_1 \sin \theta - m_2}{4m_1 + m_2 + 2I_1/r_1^2 + I_2/r_1 r_2}$ |
| $m_1 a_1 = F_1$: | $m_1 a_1 = m_1 g \sin \theta - T_{1b}$ | | $\alpha_2 = \frac{a_2}{r_2} = \frac{g}{r_2} \frac{2m_1 \sin \theta - m_2}{4m_1 + m_2 + 2I_1/r_1^2 + I_2/r_1 r_2}$ |
| $m_2 a_2 = F_2$: | $m_2 a_2 = -m_2 g + T_{2b}$ | | $\alpha_1 = 2 \frac{g}{r_1} \frac{2m_1 \sin \theta - m_2}{4m_1 + m_2 + 2I_1/r_1^2 + I_2/r_1 r_2}$ |
| geometrie: | $r_1 \alpha_1 = a_1$ | | |
| geometrie: | $r_2 \alpha_2 = a_2$ | | |
| $I_1 \alpha_1 = \tau_1$: | $I_1 \alpha_1 = (T_{1b} - T_{1a}) r_1$ | | |
| $I_2 \alpha_2 = \tau_2$: | $I_2 \alpha_2 = (T_{2a} - T_{2b}) r_2$ | | |

4. Timmerman

- a. $F_g = mg$ en $F_{cf} = m\omega^2 R \cos \lambda$ de afwijking van het schietlood komt door de component hiervan loodrecht op F_g en die is x . Uit de figuur: $\sin \lambda = \frac{x}{F_{cf}}$ dus $\tan \alpha \simeq \frac{x}{mg} = \frac{F_{cf} \sin \lambda}{mg} = \frac{m\omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda}{mg} = \frac{\omega^2 R \sin 2\lambda}{2g}$ omdat α klein is, is ook $\alpha \simeq \frac{\omega^2 R \sin 2\lambda}{2g}$



- b. Omdat het oppervlak van de aarde op dezelfde manier is vervormd.
- c. De Coriolisversnelling is $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -2\omega v \sin \lambda$
 De kogel rolt gedurende 1 s om de 10 m af te leggen. De zijdelingse afwijking is dan

$$\int \int a_c dt = \frac{1}{2} a_c t^2 = -\omega v t^2 \sin \lambda = -\omega v \left(\frac{\ell}{v}\right)^2 \sin \lambda = -\frac{\omega \ell^2}{v} \sin \lambda =$$

$$= -\frac{7.2722 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \times (10 \text{ m})^2}{10 \text{ m} / 1 \text{ s}} \sin 60^\circ = -6.2979 \times 10^{-4} \text{ m}$$
- d. De scheefhoek ontstaat doordat de waterpas fout aanwijst (het schilderij zit vast!) en is het verschil tussen stilstaand en rijdend en komt dus alleen door de Coriolisversnelling. Deze is $a_c = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -2\omega v \sin \lambda$. Deze is horizontaal en $\tan \beta = \frac{a_c}{g} =$

$$\frac{-2\omega v \sin \lambda}{g} = \frac{-3.7787 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}}{9.8 \text{ m s}^{-2}} = -3.8558 \times 10^{-4}$$
 omdat β klein is, is ook $\beta = -3.8558 \times 10^{-4} \text{ rad} \simeq -2.2092 \times 10^{-2}^\circ$
- e. Nu is $a_c = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -2\omega v$ in het vlak loodrecht op de aardas (zie fig 1d hierboven) de component in het horizontale vlak is $-2\omega v \sin \lambda$ en dus is β hetzelfde als bij d.: $\beta = -3.8558 \times 10^{-4} \text{ rad}$

5. vat

- a. Pas $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gy = \text{const}$ toe op een stroomlijn van het oppervlak naar het uitstromende water. Aan beide kanten is atmosferische druk en we nemen het wateroppervlak stationair. Dus $\frac{1}{2}v_{opp}^2 + gy_{opp} = \frac{1}{2}v_{uit}^2 + gy_{uit}$ en met $v_{opp}^2 = 0$ volgt $\frac{1}{2}v_{uit}^2 = g(y_{opp} - y_{uit})$
 Voor opening 1: $\frac{1}{2}v_{uit}^2 = g(h - q)$ dus $v_1 = \sqrt{2g(h - q)}$
 Voor opening 2: $\frac{1}{2}v_{uit}^2 = g(h - 2q)$ dus $v_2 = \sqrt{2g(h - 2q)}$
- b. De vloeistofstraal heeft bij het verlaten van het vat een horizontale snelheid volgens a. en een verticale snelheid nul. Dus $x_1 = t_1 \sqrt{2g(h - q)}$ en $y_1 = q - \frac{1}{2}gt_1^2$ en $x_2 = t_2 \sqrt{2g(h - 2q)}$ en $y_2 = 2q - \frac{1}{2}gt_2^2$; de grond wordt bereikt voor $y = 0$ dus op $t_1 = \sqrt{\frac{2q}{g}}$ resp. $t_2 = \sqrt{\frac{4q}{g}}$ en dan is $x_1 = \sqrt{\frac{2q}{g}} \sqrt{2g(h - q)} = 2\sqrt{q(h - q)}$ en $x_2 = \sqrt{\frac{4q}{g}} \sqrt{2g(h - 2q)} = 2\sqrt{2q(h - 2q)}$
- c. Voor het snijpunt is $y_1 = y_2$ en $x_1 = x_2 =: x$ uit $y_1 = y_2$ volgt $q - \frac{1}{2}gt_1^2 = 2q - \frac{1}{2}gt_2^2$ en omdat de horizontale snelheden konstant zijn is $t_i = x/v_i$ dus $q - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_1}\right)^2 = 2q - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_2}\right)^2$ met bovenstaande v_1 en v_2 geeft dat $q - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{2g(h - q)} = 2q - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{2g(h - 2q)}$ hieruit volgt $x = 2\sqrt{(h - q)(h - 2q)} = a$

6. Potentiaal

- a. en b,c,d

