

Mechanica tentamen - 14 februari 2003

1. differentiaalvergelijking

- a. De dv is homogeen en lineair; de karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ met oplossingen $\lambda = -2$ en $\lambda = 3$. De oplossing van de dv is dus $x(t) = Ae^{-2t} + Be^{3t}$
- b. Met de beginvoorwaarden volgt
- $$\left. \begin{array}{l} Ae^{-0} + Be^0 = 5 \\ -2Ae^{-0} + 3Be^0 = 1 \end{array} \right\} \text{ dus } A = \frac{14}{5} \text{ en } B = \frac{11}{5} \text{ dus } x(t) = \frac{14}{5}e^{-2t} + \frac{11}{5}e^{3t}$$

2. potentiaal

$$\mathbf{F} = -\nabla V = - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) V = -V_0 \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ \frac{\partial}{\partial y} e^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ \frac{\partial}{\partial z} e^{-(x^2+y^2+z^2)} \end{array} \right) = V_0 \left(\begin{array}{c} 2xe^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 2ye^{-(x^2+y^2+z^2)} \\ 2ze^{-(x^2+y^2+z^2)} \end{array} \right) =$$

$$2V_0 e^{-r^2} \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = 2V_0 \mathbf{r} e^{-r^2}$$

3. weegschaal

- a. $v = gt$
- b. (De afstand die de ketting aflegt) = (de lengte die op de weegschaal ligt) = $s = \frac{1}{2}gt^2$
 dus $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ en $v = g\sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{2gs}$
- c. $\Delta p = mv = \mu \Delta s$ $v = \mu v \Delta t$ $v = \mu v^2 \Delta t$
- d. De kracht t.g.v. de vallende ketting is $F_{val} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \mu v^2 = \mu 2gs$ en tengevolge van de reeds gevallen ketting is $F_{lig} = \mu gs$ totaal $F = 3\mu gs = 3F_{lig}$ QED.

4. planeet

- a. $F_g = G \frac{Mm}{R^2}$ en $F_{cf} = m\omega^2 R$ moeten gelijk zijn dus $G \frac{Mm}{R^2} = m\omega^2 R$ en $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$
- b. Je horizontale snelheid op de evenaar is ωR ; bij het sprongetje kom je op afstand $R + \Delta R$ en wordt je hoeksnelheid $\omega_s = \frac{\omega R}{R + \Delta R}$ de kracht naar het m.p. van de planeet op jou wordt dan $F = G \frac{Mm}{(R + \Delta R)^2} - m \left(\frac{\omega R}{R + \Delta R} \right)^2 (R + \Delta R) = G \frac{Mm}{(R + \Delta R)^2} \left(1 - \frac{(R + \Delta R)}{R} \right) < 0$ dus je vliegt eraf!

5. jojo

- a. $I = \int_0^b r^2 dm = \int_0^b r^2 \sigma 2\pi r dr = \frac{1}{2} \sigma \pi b^4$; $M = \sigma \pi b^2$; $I = \frac{1}{2} M b^2$
- b. $I = 2 \times \frac{1}{2} M b^2 = M b^2$ ofwel $I = \frac{1}{2} M_{jojo} b^2$. Hierna is $m = M_{jojo}$
- c. $F = ma \Rightarrow ma = -mg + T$ (T is de spankracht in het touw)
 $\tau = I\alpha \Rightarrow I\alpha = \frac{1}{2} bT$
- d. $\frac{\Delta \theta}{\Delta x} = \frac{2\pi}{-b\pi}$ dus $d\theta = -\frac{2}{b} dx$ dus $\alpha = -\frac{2}{b} a$
- e. Uit c. met $\alpha = -\frac{2}{b} a$ volgt

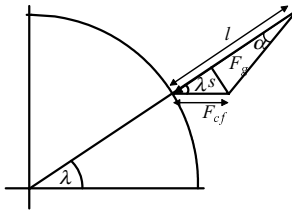
$$\left. \begin{array}{l} ma = -mg + T \\ -I \frac{2}{b} a = \frac{1}{2} bT \end{array} \right\} \Rightarrow a = -\frac{g}{\frac{4I}{b^2 m} + 1} = -\frac{g}{\frac{4 \cdot \frac{1}{2} m b^2}{b^2 m} + 1} = -\frac{1}{3} g$$

6. vat

- a. Pas $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gy = \text{const}$ toe op een stroomlijn van het oppervlak naar het uitstromende water. Aan beide kanten is atmosferische druk en we nemen het wateroppervlak stationair. Dus $\frac{1}{2}v_{opp}^2 + gy_{opp} = \frac{1}{2}v_{uit}^2 + gy_{uit}$ en met $v_{opp}^2 = 0$ $\frac{1}{2}v_{uit}^2 = g(y_{opp} - y_{uit}) = g(h - q)$ dus $v_{uit} = \sqrt{2g(h - q)}$
- b. De vloeistofstraal heeft bij het verlaten van het vat een horizontale snelheid volgens a. en een verticale snelheid nul. Dus $x = t\sqrt{2g(h - q)}$ en $y = q - \frac{1}{2}gt^2$ de grond wordt bereikt voor $y = 0$ dus op $t = \sqrt{\frac{2q}{g}}$ en dan is $x = \sqrt{\frac{2q}{g}}\sqrt{2g(h - q)} = 2\sqrt{q(h - q)}$
- c. Nu is x maximaal als $\frac{dx}{dq} = 0$ en $\frac{dx}{dq} = \frac{d}{dq}2\sqrt{q(h - q)} = \frac{1}{\sqrt{q(h - q)}}(h - 2q) = 0$ voor $q = \frac{1}{2}h$

7. timmerman

- a. Op het lood werken de zwaartekracht en de centrifugale schijnkracht: $F_g = mg$ en $F_{cf} = m\omega^2 R \cos \lambda$. De afwijking van het schietlood komt door de horizontale component $F_{cf} \sin \lambda$ van F_{cf} deze is $F_{cf} \sin \lambda = m\omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda = m\omega^2 R \sin 2\lambda$. Het lood hangt in de richting van de resultante van deze krachten, dus $\frac{s}{\ell} = \frac{m\omega^2 R \sin 2\lambda}{mg}$ en $s = \ell \frac{\omega^2 R \sin 2\lambda}{2g}$. Deze afwijking is naar het zuiden dus $(x, y) = \left(0, -\ell \frac{\omega^2 R \sin 2\lambda}{2g}\right)$



- b. Nu komt de Coriolisschijnkracht erbij. Deze is $F_{cor} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -2m\omega v \sin \lambda$ en is in het horizontale vlak en naar het oosten gericht dus $(x, y) = \left(\ell \frac{2\omega v \sin \lambda}{g}, -\ell \frac{\omega^2 R \sin 2\lambda}{2g}\right)$
- c. Nu is $F_{cor} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -2m\omega v$ maar deze is in dezelfde richting als F_{cf} . De horizontale component berekenen we analoog aan a. Deze is $-2m\omega v \sin \lambda$ en is in zuidelijke richting dus $(x, y) = \left(0, -\ell \frac{\omega^2 R \sin 2\lambda}{2g} - \ell \frac{2\omega v \sin \lambda}{g}\right)$
- d. De grootte van de afwijking wordt gegeven door de horizontale component van $\mathbf{F}_{cor}$ en die is $-2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \times \hat{\mathbf{k}}$ met $\hat{\mathbf{k}}$ een eenheidsvector loodrecht op het horizontale vlak. Definieer nu een (X, Y, Z) stelsel met X naar het oosten, Y naar het noorden en Z in de richting van $\hat{\mathbf{k}}$, dan geldt:

$$\mathbf{F}_{cor,hor} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \times \hat{\mathbf{k}} = -2m \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos \lambda \\ \omega \sin \lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$-2m \begin{pmatrix} \omega v_x \sin \lambda \\ \omega v_y \sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en dus } F_{cor,hor} = |\mathbf{F}_{cor,hor}| = -2m\omega v \sin \lambda \text{ met } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

onafhankelijk van de richting $\arctan \frac{v_y}{v_x}$ waarin de trein rijdt. QED.