

Mechanica deeltentamen 2 - 20 december 2002

1. raket

- $d\mathbf{p} = \mathbf{p}_r(t+dt) + \mathbf{p}_f(t+dt) - \mathbf{p}_r(t) = (m+dm)(\mathbf{v}+d\mathbf{v}) + (-dm)(\mathbf{v}+\mathbf{u})$
 $d\mathbf{p} = m d\mathbf{v} - \mathbf{u} dm$ dus $0 = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{u} \frac{dm}{dt}$ en $\mathbf{u} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ of $\mathbf{u} \mu = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ dit is de bewegingsvergelijking
- Het stuwvermogen is $\frac{dp_f}{dt} = -\mathbf{u} \frac{dm}{dt} = -\mathbf{u} \mu$
- $\mathbf{u} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ dus $\mathbf{u} \frac{dm}{m} = d\mathbf{v}$ en $\mathbf{u} \int_{M_s - \mu t}^{M_s} \frac{dm}{m} = \int_0^v d\mathbf{v}$ en dus $\mathbf{u} \ln \frac{M_s}{M_s - \mu t} = \mathbf{v}$ ofwel, rekeninghoudend met de richting van de vectoren: $v(t) = +u \ln \frac{M_s}{M_s - \mu t}$
- $v(\infty) = +u \ln \frac{M_s}{M_0}$

2. Schijf met touw. Noem de spankracht in het touw links S_L en in het touw rechts S_R . Noem de richting van F positief.

- Denk de schijf opgebouwd uit concentrische ringen $dI_{ring} = r^2 dm$ en $dm_{ring} = \sigma dA = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} r dr$. Dus $I_{schijf} = \int_0^R r^2 \frac{2M}{R^2} r dr = \frac{1}{2} M R^2$
- Uit $f = ma$ voor de massa en $\tau = I\alpha = I\dot{\omega}$ voor het wiel, en uit $x = R\theta$ volgt:

$$m_1 a = S_L - m_1 g$$

$$I\dot{\omega} = R(S_R - S_L) = R(F - S_L)$$

$$a = R\dot{\omega}$$
- De versnelling a van m_1 omhoog volgt uit de in b. gegeven vergelijkingen; men vindt zo: $a = \frac{F - m_1 g}{m_1 + \frac{M}{2}}$.
- De kracht blijft weliswaar hetzelfde, maar de versnellende massa wordt groter.
- De bewegingsvergelijkingen worden:

$$m_1 a = S_L - m_1 g$$

$$I\dot{\omega} = R(S_R - S_L)$$

$$a = R\dot{\omega}$$
 waaruit volgt: $a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$

$$m_2 a = m_2 g - S_R$$

3. soldaat

- De zwaartekracht $F_z = mg$, de Coriolis schijnkracht $F_C = -2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -2m\omega v \sin \lambda$ en de middelpuntvliedende schijnkracht $F_{mv} = -m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = -m\omega^2 R \cos \lambda$ met $\boldsymbol{\omega}$ de rotatie snelheid en $\mathbf{R}$ de straal van de aarde.
- De tijd die de kogel onderweg is is $T = \frac{x}{v}$. De horizontale versnelling overdwars is $a_C = -2\omega v \sin \lambda$ de horizontale snelheid overdwars is $v_C = \int (-2\omega v \sin \lambda) dt = -2\omega v t \sin \lambda$ de horizontale afwijking is $\int v_C dt = \int (-2\omega v t \sin \lambda) dt = -\omega v t^2 \sin \lambda = -\frac{\omega x^2}{v} \sin \lambda$ d.i. naar het Oosten.
- De centrifugale schijnkracht is $-\omega^2 R \cos \lambda$ en de komponent daarvan in verticale richting is $-\omega^2 R \cos^2 \lambda$ dus de totale verticale versnelling naar beneden is $a_v = g - \omega^2 R \cos^2 \lambda$ de verticale snelheid is $v_v(t) = \int (g - \omega^2 R \cos^2 \lambda) dt = t(g - \omega^2 R \cos^2 \lambda)$ en de verticale afwijking is $\int t(g - \omega^2 R \cos^2 \lambda) dt = \frac{1}{2} t^2 (g - \omega^2 R \cos^2 \lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{v}\right)^2 (g - \omega^2 R \cos^2 \lambda)$ deze is naar beneden.

4. staaf

- a. $E = \frac{\text{stress}}{\text{strain}} = \frac{F/A}{\frac{\Delta \ell}{\ell}} = \frac{2mg/\frac{1}{4}\pi d^2}{\frac{\Delta \ell}{\ell}}$ dus $\Delta \ell = \frac{8\ell mg}{\pi E d^2}$
- b. $W = \int_0^{\Delta \ell} F(s) ds$ met $F(s)$ uit $E = \frac{\text{stress}}{\text{strain}} = \frac{F/A}{\frac{s}{\ell}}$ dus $F(s) = \frac{EAs}{\ell}$ volgt $W = \int_0^{\Delta \ell} \frac{EAs}{\ell} ds = \frac{EA(\Delta \ell)^2}{2\ell} = \frac{E(\frac{1}{4}\pi d^2)(\frac{8\ell mg}{\pi E d^2})^2}{2\ell} = \frac{8A\ell m^2 g^2}{\pi E d^2}$
- c. Voor een buisje met straal r en wanddikte Δr geldt: $G\phi = \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{\Delta F}{2\pi r \Delta r}$ terwijl $\phi = \frac{r\theta}{\ell}$ dus $\Delta F = 2\pi r \Delta r G \frac{r\theta}{\ell}$ dus $\Delta T = r \Delta F = 2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^3 \Delta r$. Voor de staaf wordt dat $T = \int_0^{d/2} 2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^3 dr = \frac{1}{32} \pi G \frac{\theta}{\ell} d^4$
- d. $T = I\alpha$ geeft $\frac{1}{32} \pi G \frac{\theta}{\ell} d^4 = \left(2 \cdot m \cdot \left(\frac{1}{2}b\right)^2\right) \ddot{\theta}$ dus $\ddot{\theta} + \frac{\pi G d^4}{16b^2 m \ell} \theta = 0$ (of $\ddot{\theta} + \frac{2c}{b^2 m} \theta = 0$)
- e. $\omega = \sqrt{\frac{\pi G d^4}{16b^2 m \ell}}$ (of $\omega = \sqrt{\frac{2c}{b^2 m}}$)

5. (satelliet)

- a. $M = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$
- b. $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$
- c. $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 = \frac{4\pi^2}{G\frac{4}{3}\pi R^3 \rho} a^3 = \frac{3\pi}{G\rho} \frac{a^3}{R^3} \simeq \frac{3\pi}{G\rho}$ de laatste gelijkheid geldt omdat $a = R + d \simeq R$. T hangt dus alleen van ρ af en niet van R .

6. Cylindrisch vat

- a. Zij x de verticale afstand van het scharnier tot een punt op de klep. Het water stroomt nog niet dus $p = \rho g(d+x)$. Het moment om het scharnier t.g.v. een horizontaal strookje water is $\Delta M = Fx = p\Delta A x = \rho g(d+x)b\Delta x x$ en het totale moment is dus $M = \int dM = \int_0^h \rho g(d+x)xb dx = \rho gb\left(\frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{2}dh^2\right)$
- b. Pas Bernoulli: $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gy = \text{const}$ toe op een stroomlijn van het oppervlak naar het uitstromende water. Aan beide kanten is atmosferische druk in dit onderdeel nemen we het wateroppervlak stationair. Dus $\frac{1}{2}v_{opp}^2 + gy_{opp} = \frac{1}{2}v_{uit}^2 + gy_{uit}$ en met $v_{opp}^2 = 0$ $\frac{1}{2}v_{uit}^2 = g(y_{opp} - y_{uit}) = gd$ dus $v_{uit} = \sqrt{2gd}$
- c. Het volumen dat per seconde uitstroomt is hbv_{uit} . Het oppervlak van het water zakt dus met snelheid $v_{opp} = \frac{hbv_{uit}}{A}$ nu weer met Bernoulli: $\frac{1}{2}v_{opp}^2 + gy_{opp} = \frac{1}{2}v_{uit}^2 + gy_{uit}$ ofwel $g(y_{opp} - y_{uit}) = \frac{1}{2}v_{uit}^2 - \frac{1}{2}v_{opp}^2$ en dus $2gd = v_{uit}^2 - v_{opp}^2 = v_{uit}^2 - \left(\frac{hbv_{uit}}{A}\right)^2 = v_{uit}^2 \left(1 - \left(\frac{hb}{A}\right)^2\right)$ dus $v_{uit} = \sqrt{\frac{2gd}{1 - \left(\frac{hb}{A}\right)^2}}$
- d. Het volumen dat per seconde uitstroomt is $hbv_{uit} = hb\sqrt{\frac{2gs}{1 - \left(\frac{hb}{A}\right)^2}}$ waarbij s de tijdsafhankelijke hoogte is van het water boven de klep. Het oppervlak van het water zakt dus met snelheid $v_{opp} = \frac{hbv_{uit}}{A} = \frac{hb\sqrt{\frac{2gs}{1 - \left(\frac{hb}{A}\right)^2}}}{A}$ die snelheid is ook $-\frac{ds}{dt}$ dus

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= -v_{opp} = -\frac{hb\sqrt{\frac{2gs}{1-(\frac{hb}{A})^2}}}{A} \text{ en dat kunnen we integreren met scheiding van vari-} \\
\text{abelen: } \frac{ds}{\sqrt{s}} &= -\frac{hb\sqrt{\frac{2g}{1-(\frac{hb}{A})^2}}}{A} dt \text{ en de tijd waarin } d \rightarrow d/2 \text{ volgt uit } \int_d^{d/2} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \\
&= -\int_0^t \frac{hb\sqrt{\frac{2g}{1-(\frac{hb}{A})^2}}}{A} dt \text{ ofwel } \sqrt{d}(2-\sqrt{2}) = \frac{hb\sqrt{\frac{2g}{1-(\frac{hb}{A})^2}}}{A} t \text{ en dus} \\
t &= A(2\sqrt{2}-2) \sqrt{\frac{d((\frac{1}{hb})^2 - (\frac{1}{A})^2)}{g}}
\end{aligned}$$