

Mechanica deeltentamen 1 - 22 oktober 2002

1. wiskunde

- $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3$
- $e^x = 1 + x$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$
- De karakteristieke vergelijking voor $\ddot{x} + 6\dot{x} + 7x + 8 = 0$ is $p^3 + 6p^2 + 7 = 0$
- $\frac{d}{dx} \sin(e^{5x}) = 5e^{5x} \cos(e^{5x})$
- $(15 + 5i) / (2 + i) = 7 - i$

2. waterskiër

- $m\ddot{x} = F_b - k\dot{x}$
- Homogene vergelijking is $m\ddot{x} + k\dot{x} = 0$ de karakteristieke vergelijking daarbij is $mp^2 + kp = 0$ met oplossingen: $p = 0$ en $p = -\frac{k}{m}$. De oplossing van de homogene vergelijking is dus $x(t) = A + Be^{-\frac{k}{m}t}$. Een PO oplossing van de inhomogene is bijv $k\dot{x} = F_b$ (dan is $\ddot{x} = 0$) ofwel $x = \frac{F_b}{k}t$. De algemene oplossing is dus $x(t) = \frac{F_b}{k}t + A + Be^{-\frac{k}{m}t}$ en $v(t) = \frac{F_b}{k} - \frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}t}$
- Uit $x(t) = \frac{F_b}{k}t + A + Be^{-\frac{k}{m}t}$ volgt $\dot{x}(t) = \frac{F_b}{k} - \frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}t}$
 Uit $x(0) = \frac{F_b}{k}0 + A + Be^{-\frac{k}{m}0} = 0$ en $\dot{x}(0) = \frac{F_b}{k} - \frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}0} = 0$ volgt
 $A + B = 0$ en $\frac{F_b}{k} = \frac{k}{m}B$ dus $-A = B = \frac{mF_b}{k^2}$ invullen geeft:
 $x(t) = \frac{F_b}{k}t - \frac{mF_b}{k^2} + \frac{mF_b}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}$ en $\dot{x}(t) = \frac{F_b}{k} - \frac{F_b}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$
- Voor $t \rightarrow \infty$ volgt $\dot{x}(t) = \frac{F_b}{k}$. Anders: dan is $\ddot{x} = 0$ dus het is de oplossing van $k\dot{x} = F_b$.

3. hellend vlak

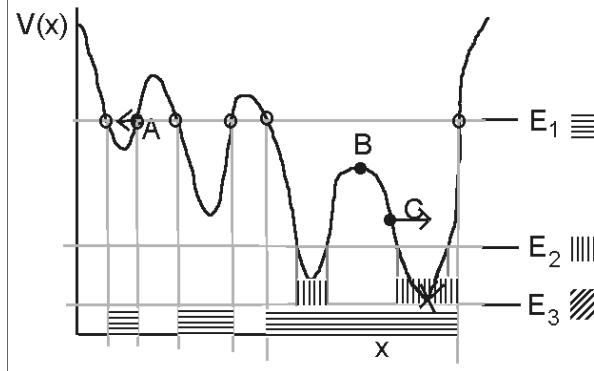
- Uit de geometrie en de bewegingsvergelijkingen volgt

$a_1 = 2a_2$ $T_2 = 2T_1$ $m_1a_1 = m_1g \sin \theta - T_1$ $m_2a_2 = -m_2g + T_2$	waaruit volgt	$a_1 = 2g \frac{2m_1 \sin \theta - m_2}{4m_1 + m_2}$ $a_2 = g \frac{2m_1 \sin \theta - m_2}{4m_1 + m_2}$ $T_1 = gm_1m_2 \frac{\sin \theta + 2}{4m_1 + m_2}$ $T_2 = 2gm_1m_2 \frac{\sin \theta + 2}{4m_1 + m_2}$
---	---------------	--
- Uit de geometrie en de bewegingsvergelijkingen volgt

$a_1 = 2a_2$ $T_2 = 2T_1$ $m_1a_1 = m_1g \sin \theta - T_1 - \mu N$ $m_2a_2 = -m_2g + T_2$ $N = m_1g \cos \theta$	waaruit volgt	$a_1 = 2g \frac{2m_1 \sin \theta - m_2 - 2\mu m_1 \cos \theta}{4m_1 + m_2}$ $a_2 = g \frac{2m_1 \sin \theta - m_2 - 2\mu m_1 \cos \theta}{4m_1 + m_2}$ $T_1 = gm_1m_2 \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta + 2}{4m_1 + m_2}$ $T_2 = 2gm_1m_2 \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta + 2}{4m_1 + m_2}$ $N = gm_1 \cos \theta$
---	---------------	--

4. Potentiaal

a. en b,c,d



e. $\mathbf{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(xy + xz + yz) = -\begin{pmatrix} y + z \\ x + z \\ x + y \end{pmatrix}$ en $\mathbf{F}(-2, 2, 2) = -\begin{pmatrix} 2 + 2 \\ -2 + 2 \\ -2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -4\hat{\mathbf{i}}$ d.i. in de richting van de negatieve x-as

f. $P(t) = F(t) v = \{(3 \text{ N m}^{-1})(3 \text{ m}) + (5 \text{ N m}^{-2})(3 \text{ m})^2\} 5 \text{ m s}^{-1} = 270 \text{ W}$

5. Mijntwerkster:

a. $ma = -F_g + F_v \Rightarrow (80 \text{ kg})(-6 \text{ m s}^{-2}) = -(80 \text{ kg})(9.8 \text{ m s}^{-2}) + F_v$ dus $F_v = (80 \text{ kg})(3.8 \text{ m s}^{-2}) = 304.0 \text{ N}$ de weegschaal is echter geijkt bij een zwaartekracht versnelling van 9.8 m s^{-2} dus hij geeft aan: $\frac{(80 \text{ kg})(3.8 \text{ m s}^{-2})}{9.8 \text{ m s}^{-2}} = 31.02 \text{ kg}$

b. Binnen de aarde is $F_g(r) = G\frac{mM}{a^3}r$ op het oppervlak is $F_g(a) = G\frac{mM}{a^3}a = g$ dus $F_g(r) = g\frac{r}{a}$. We hebben zo $F_g(6380 \text{ km} - 638 \text{ km}) = 9.8 \text{ m s}^{-2} \frac{6380 \text{ km} - 638 \text{ km}}{6380 \text{ km}} = 8.82 \text{ m s}^{-2}$. We vinden zo $\frac{(80 \text{ kg})(8.82 \text{ m s}^{-2} - 6 \text{ m s}^{-2})}{9.8 \text{ m s}^{-2}} = 23.02 \text{ kg}$

6. Beschouw de gedempte harmonische oscillator met massa m veerconstante k en dempingsconstante b .

a. $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

b. Uit de karakteristieke vergelijking $mp^2 + bp + k = 0$ volgt $p = \frac{1}{2m}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk})$ dus de oplossing is $x = Ae^{\frac{1}{2m}(-b + \sqrt{b^2 - 4mk})t} + Be^{\frac{1}{2m}(-b - \sqrt{b^2 - 4mk})t}$

c. $Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\frac{b}{m}} = \frac{\sqrt{km}}{b}$ betekenis: $\frac{2\pi \text{ opgeslagen energie}}{\text{energie verlies per periode}}$ of reciproke van de relatieve bandbreedte.

d. $b^2 = 4mk$

e. $x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} + Bte^{-\frac{b}{2m}t}$