

1. raket:

- a. $d\mathbf{p} = \mathbf{p}_r(t + dt) + \mathbf{p}_f(t + dt) - \mathbf{p}_r(t) = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + (-dm)(\mathbf{v} + \mathbf{u})$
 $d\mathbf{p} = m d\mathbf{v} - \mathbf{u} dm$
 $m\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{u} \frac{dm}{dt}$
 $m\mathbf{g} + \mathbf{u} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ dit is de bewegingsvergelijking
- b. $m\mathbf{g} + \mathbf{u} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$
 $\mathbf{g} dt + \mathbf{u} \frac{dm}{m} = d\mathbf{v}$
 $\mathbf{g} \int_0^t dt + \mathbf{u} \int_M^{M-\mu t} \frac{dm}{m} = \int_0^v d\mathbf{v}$
 $\mathbf{g} t + \mathbf{u} \ln \frac{M-\mu t}{M} = \mathbf{v}$ ofwel, rekeninghoudend met de richting van de vectoren:
 $-gt - u \ln \frac{M-\mu t}{M} = v$
 $v(t) = -gt + u \ln \frac{M}{M-\mu t}$
- c. $-gt + u \ln \frac{M}{M-\mu t} > 0$

2. hemellichaam

- a. $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r} F(r) = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{const.}$
- b. Een lijn die een planeet met de zon verbindt gaat in gelijke tijden door gelijke oppervlakken Zie fig 5.36. boek $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2m} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{L}{2m} = \text{const.}$ q.e.d.

3. kepler

- a. $M = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$
- b. $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$
- c. $m\omega^2 a = \frac{GMm}{a^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM}{a^3} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$ Of:
 $T = \frac{2\pi a}{v}$ waarbij v volgt uit $F_{grav} = F_{cp}$ of $\frac{GMm}{a^2} = \frac{mv^2}{a}$ dus $v = \sqrt{\frac{GM}{a}}$ en $T = \frac{2\pi a}{\sqrt{\frac{GM}{a}}}$
 ofwel $T^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{\frac{GM}{a}} = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$
- d. $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 = \frac{4\pi^2}{G \frac{4}{3}\pi R^3 \rho} a^3 = \frac{3\pi}{G\rho} \frac{a^3}{R^3} \simeq \frac{3\pi}{G\rho}$ de laatste gelijkheid geldt omdat $a = R + d \simeq R$. T hangt dus alleen van ρ af en niet van R .

4. pirouettedraaier

- a. $I = \Sigma mr^2 = 2m(r(t))^2 = 2m(r_0 - \beta t)^2$
- b. $[0 = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{dI}{dt} \text{ dus } I \frac{d\omega}{dt} = -\omega \frac{dI}{dt} \text{ en } \ln \omega = -\ln I + c] \text{ dus } I\omega = L = \text{const.}$ Op $t = 0$ is $L = 2mr_0^2\omega_0$ dus $\omega(t) = \frac{L}{I} = \frac{2mr_0^2\omega_0}{2m(r_0 - \beta t)^2} = \frac{r_0^2}{(r_0 - \beta t)^2} \omega_0 = \frac{1}{(1 - \frac{\beta t}{r_0})^2} \omega_0$
- c. $L(t) = 2mr_0^2\omega_0$ er is geen extern moment dus hangt L niet van de tijd af.
- d. $r < 0$
- (I) I neemt dan weer toe met de tijd en ω af
- (II) Ja
- (III) Zij kruist haar armen en strekt ze weer.
- e. $E_k(t) = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 2m(r_0 - \beta t)^2 \left(\frac{r_0^2}{(r_0 - \beta t)^2} \omega_0 \right)^2 = m \frac{r_0^4 \omega_0^2}{(r_0 - \beta t)^2}$

f. arbeid

$$(I) W = E_{r=r_1} - E_{r=r_0} = m \frac{r_0^4 \omega_0^2}{(r_1)^2} - m \frac{r_0^4 \omega_0^2}{(r_0)^2} = m r_0^4 \omega_0^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$$

(II) Zij moet per arm de centripetale kracht $F = m\omega^2 r$ leveren.

$$W = \int_{r_0}^{r_1} 2m\omega^2 \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{r_0}^{r_1} 2m\omega^2 r dr$$

$$W = - \int_{r_0}^{r_1} 2m \left(\frac{r_0^2}{(r_0 - \beta t)^2} \omega_0 \right)^2 r dr = - \int_{r_0}^{r_1} 2m \left(\frac{r_0^2}{r^2} \omega_0 \right)^2 r dr = -2m r_0^4 \omega_0^2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r^3} dr = m r_0^4 \omega_0^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$$

(III) Gelijk want beide manieren zijn juist.

5. schijf

a. Kies concentrische ringen dan is $dm = 2\pi \rho w dr$ met $m = \rho \pi R^2 w$ en

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 2\pi \rho w dr = 2\pi \rho w \int r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho w R^4 = \frac{1}{2} \pi \frac{m}{\pi R^2 w} w R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

b. $M = \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha$ dus met T de spankracht in het touw geldt:

$$\text{voor het wiel: } TR = \frac{1}{2} m R^2 \alpha$$

$$\text{voor de losse massa: } mg - T = ma$$

c. Uit de geometrie volgt: $x = \theta R$ dus we hebben het stelsel

$$\left. \begin{array}{l} TR = \frac{1}{2} m R^2 \alpha \\ mg - T = ma \\ a = \alpha R \end{array} \right\} \text{ en dus } a = \frac{2}{3} g$$

d. Dit geeft dezelfde bewegingsvergelijkingen

$$TR = \frac{1}{2} m R^2 \alpha$$

$$mg - T = ma$$

$$a = \alpha R$$

e. En dus dezelfde versnelling: $a = \frac{2}{3} g$